2013 年 7 月 1 日

確率分布と水文統計量の求め方

洪水流量や確率年雨量を求める場合など，年最大水文量に基づく水文統計量の求め方について，参考文献に基づき，まとめています．この文書は，理論を解説するものではなく，プログラムを作成するうえで必要となる数式を整理したものです．

目次

1. 基礎事項 1
1.1 確率密度関数と確率分布関数 . . . 1
1.2 確率年 . . . 1
1.3 平均値・分散・ひずみ係数 . . . 1
1.4 確率重み付き積率と L 積率 . . . 2
1.5 プロッティング・ポジション公式 . . . 2
1.6 水文統計解析に用いられる確率分布関数 . . . 3
2. 確率分布モデル 4
2.1 正規分布 (N 分布) . . . 4
2.2 対数正規分布 (LN3 分布) . . . 5
2.3 ピアソン III 型分布 (P3 分布) . . . 7
2.4 対数ピアソン III 型分布 (LP3 分布) . . . 8
2.5 グンベル分布 . . . 10
2.6 一般化極値分布 (GEV 分布) . . . 11
2.7 平方根指数型最大値分布 (SQRT-ET 分布) . . . 12
2.8 ワイブル分布 (3 母数) . . . 14
2.9 指数分布 . . . 16
2.10 一般化パレート分布 (GPD) . . . 17
3. 適合度評価法 18
3.1 相関係数 . . . 18
3.2 SLSC . . . 18
4. ジャックナイフ法による推定 19
5. ブートストラップ法による推定 19
6. 棄却検定 20

1.　基礎事項

1.1　確率密度関数と確率分布関数

確率密度関数と確率分布関数の関係は以下に示すとおりである．

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{1}$$

ここに，　$f(x)$　：確率密度関数 (PDF : probability density function)

　　　　　$F(x)$　：確率分布関数 (CDF : cumulative distribution function

確率分布関数の定義より，確率分布関数の値 $F(x)$ は，x に対する非超過確率に等しいことがわかる．

1.2　確率年

(1)　確率年

$$T = \frac{1}{\mu(1-p)} \tag{2}$$

ここに，　T　：確率年あるいは再現期間 (単位：年)

　　　　　p　：水文変量 x_p に対する非超過確率

$$p = F(x_p) \qquad x_p = F^{-1}(p)$$

　　　　　x_p はクオンタイルあるいは T-年事象と呼ばれる

　　　　　μ　：事象 $X \geqq x_p$ の年平均出現回数

上記は，閾値を越えるデータ群 (POT, Peaks Over Threshold data) の取り扱い時に有効である．

毎年の最大値 (AMS, Annual Maximum Series data) を扱う場合は $\mu = 1$ となり，確率年 T は以下のとおりとなる．

$$T = \frac{1}{1-p} \qquad p = 1 - \frac{1}{T} \tag{3}$$

(2)　T 年確率事象 x_T が N 年間に 1 回も起こらない確率と 1 回以上起こる確率 (AMS に対して)

$$P(X < x_T)_N = \left(1 - \frac{1}{T}\right)^N \qquad \text{1 回も起こらない確率} \tag{4}$$

$$P(X \geqq x_T)_N = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^N \qquad \text{1 回以上起こる確率} \tag{5}$$

(3)　計算事例：T 年確率事象が N 年間に 1 回も起こらない確率 P (AMS に対して)

T	5	10	30	100	200	500	1000	5000
N	5	5	5	10	20	50	100	500
P	0.328	0.590	0.844	0.904	0.905	0.905	0.905	0.905

1.3　平均値・分散・ひずみ係数

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \qquad \text{標本平均} \tag{6}$$

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} (x_j - \bar{x})^2 \qquad \text{標本分散} \tag{7}$$

$$C_s = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{x_j - \bar{x}}{S}\right)^3 \qquad \text{標本ひずみ係数} \tag{8}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{N}{N-1}S^2 \qquad \text{不偏分散} \tag{9}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2}C_s \qquad \text{不偏ひずみ係数} \tag{10}$$

1.4　確率重み付き積率と L 積率

確率統計水文学では，確率重み付積率 (PWM : Probability Weighted Moments) と L 積率 (L Moments) が導入され，活用されている．

従来から用いられている平均値・分散・ひずみ係数などには，データの並び順序の概念はないが，確率重み付積率および L 積率では，昇順にデータを並び替えた順序統計量が用いられる．

母集団の確率重み付き積率 (PWM) は以下のとおり定義される．

$$\beta_r = \int_0^1 xF^r dF \qquad (r = 0, 1, 2, \dots) \tag{11}$$

また，母集団の PWM と L 積率の関係は以下のとおり関係付けられる．

$$\lambda_1 = \beta_0 \tag{12}$$

$$\lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0 \tag{13}$$

$$\lambda_3 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0 \tag{14}$$

標本値の確率重み付き積率は以下のとおりであり，標本値についても PWM と L 積率の関係は同様に用いられる．

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{(j)} \tag{15}$$

$$b_1 = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{j=1}^{N} (j-1)x_{(j)} \tag{16}$$

$$b_2 = \frac{1}{N(N-1)(N-2)}\sum_{j=1}^{N} (j-1)(j-2)x_{(j)} \tag{17}$$

ここに，$x_{(j)}$ は N 個の標本を昇順に並べ替えたときの，小さいほうから j 番目の値を示す．

1.5　プロッティング・ポジション公式

$$F[x_{(i)}] = \frac{i - \alpha}{N + 1 - 2\alpha} \tag{18}$$

N	標本数
i	標本値を昇順に並べたときの小さいほうからの順位
$x_{(i)}$	i 番目の順位標本値
$F[x_{(i)}]$	プロッティング・ポジション (非超過確率相当)
α	1∼1 の定数

公式名	Weibull	Blom	Cunnane	Gringorten	Hazen
α	0	0.375	0.40	0.44	0.5

1.6　水文統計解析に用いられる確率分布関数

水文統計解析によく用いられる確率分布関数を列挙する．

分類	関数名	パラメータの数
最大値分布を表す関数 (年最大値など)	一般化極値分布 (Generalized Extreme Value distribution)	3
	グンベル分布 (Gumbel distribution)	2
	ワイブル分布 (Weibull distribution with 3 parameters)	3
	平方根指数型最大値分布 (SQRT exponential-type distribution of maximum)	2
閾値超過分布を表す関数	一般化パレート分布 (Generalized Pareto distribution)	3
	指数分布 (Exponential distribution)	2
経験的に用いられている関数	正規分布 (Normal distribution)	2
	対数正規分布 (Log-Normal Distribution with 3 parameters)	3
	ピアソン III 型分布 (Pearson type III distribution)	3
	対数ピアソン III 型分布 (Log-Pearson type III distribution)	3

2.　確率分布モデル

2.1　正規分布 (N 分布)

水文統計量 x が，正規分布に従う場合の母数推定方法を示す．

(1)　確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right] \tag{19}$$

(2)　確率分布関数

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right) \qquad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \tag{20}$$

(3)　非超過確率 p に対する水文統計量 x_p

$$z = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \qquad \rightarrow \qquad x = \mu_x + \sigma_x z \tag{21}$$

$$x_p = \mu_x + \sigma_x z_p \qquad z_p \text{ は } p = \Phi(z) \text{ となる } z \text{ の値} \tag{22}$$

(4)　母数推定 (L 積率法)

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{(j)} \qquad b_1 = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{j=1}^{N}(j-1)x_{(j)} \tag{23}$$

ここに，$x_{(j)}$ は N 個の標本を昇順に並べ替えたときの，小さいほうから j 番目の値を示す．

上記 $b_i = \beta_i$ として，以下の関係により λ_i を算定する．

$$\lambda_1 = \beta_0 \qquad \lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0 \tag{24}$$

母数は，以下に示す L 積率と母数の関係により推定する．

$$\begin{cases} \mu_x = \lambda_1 \\ \sigma_x = \sqrt{\pi}\lambda_2 \end{cases} \tag{25}$$

2.2　対数正規分布 (LN3 分布)

水文統計量 x が，分布下限 a を持つ 3 母数対数正規分布に従う場合の母数推定方法を示す.

(1)　確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)\sigma_y\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x-a)-\mu_y}{\sigma_y}\right]^2\right\} \qquad y = \ln(x-a) \tag{26}$$

(2)　確率分布関数

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x-a)-\mu_y}{\sigma_y}\right) \qquad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)dt \tag{27}$$

(3)　非超過確率 p に対する水文統計量 x_p

$$z = \frac{\ln(x-a)-\mu_y}{\sigma_y} \qquad \rightarrow \qquad x = a + \exp(\mu_y + \sigma_y z) \tag{28}$$

$$x_p = a + \exp(\mu_y + \sigma_y z_p) \qquad z_p \text{ は } p = \Phi(z) \text{ となる } z \text{ の値} \tag{29}$$

(4)　母数推定 (岩井法: クオンタイル法)

$$\begin{cases} a = \dfrac{x_{(1)} \cdot x_{(N)} - {x_m}^2}{x_{(1)} + x_{(N)} - 2x_m} \qquad x_{(1)} + x_{(N)} - 2x_m > 0 \\ \mu_y = \dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\ln(x_j - a) \\ {\sigma_y}^2 = \dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\ln(x_j - a) - \mu_y\right]^2 \end{cases} \tag{30}$$

ここに，$x_{(1)}$，$x_{(N)}$，x_m は，それぞれ標本最小値，標本最大値，メディアン (中央値) である．x_j など添字に括弧がついていない標本値は，順位は関係ない統計量であるが，実務計算では，最小・最大・メディアンを求めるのに小さい順に並び替えたほうが便利であるため $x_{(j)}$ の形となろう.

(5)　母数推定 (積率法)

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j \qquad S_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \bar{x})^2 \qquad C_{sx} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{x_j - \bar{x}}{S_x}\right)^3 \tag{31}$$

$$\mu_x = \bar{x} \qquad \sigma_x = [N/(N-1)]^{1/2}S_x \qquad \gamma_x = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2}C_{sx} \tag{32}$$

上記の計算は x_i，すなわち観測値そのままの値に対するものであり，対数値 ($\ln x_i$) に対するものではないことに注意.

(参考)
不偏ひずみ係数 γ_x については，以下に示す，Bobee と Robitaille による偏り補正した式も用いられる．( ) 内で B に乗ずるのは C_{sx} の 3 乗であることに注意.

$$\gamma_x = C_{sx}(A + B \cdot {C_{sx}}^3) \tag{33}$$

$$\text{ここに} \qquad A = 1.01 + 7.01/N + 14.66/N^2 \qquad B = 1.69/N + 74.66/N^2 \tag{34}$$

ここで，積率と母数の関係は以下の通り．

$$\mu_x = a + \exp(\mu_y) \cdot \exp(\sigma_y^2/2) \tag{35}$$

$$\sigma_x = \exp(\mu_y)\sqrt{\exp(\sigma_y^2)\{\exp(\sigma_y^2) - 1\}} \tag{36}$$

$$\gamma_x = \{\exp(\sigma_y^2) + 2\}\sqrt{\exp(\sigma_y^2) - 1} \tag{37}$$

上式の未知数 σ_y, μ_y, a が求めるべき母数となる．上記第 3 式は，

$$\gamma_x = \{\exp(\sigma_y^2) + 2\}\sqrt{\exp(\sigma_y^2) - 1} \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 4 - \gamma_x^2 = 0 \quad \text{where,} \quad x = \exp(\sigma_y^2) \tag{38}$$

と変形できるため，3 次方程式の解の公式より，以下のとおり実数解 x が求められる．

$$x = \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}\right)^{1/3} + \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}\right)^{1/3} - 1 \quad \text{where,} \quad \beta = 1 + \frac{\gamma_x^2}{2} \tag{39}$$

以上により，

$$\begin{cases} \sigma_y = \sqrt{\ln(x)} & : x \text{ は方程式 } x^3 + 3x^2 - 4 - \gamma_x^2 = 0 \text{ の正の実数解} \\ \mu_y = \ln\left(\dfrac{\sigma_x}{\sqrt{x(x-1)}}\right) & \\ a = \mu_x - \exp(\mu_y) \cdot \exp(\sigma_y^2/2) & \end{cases}$$

(6)　母数推定 (単回帰分析を用いたトライアル計算)

以下の関係を用い，各母数を推定する．

$$z = \frac{\ln(x - a) - \mu_y}{\sigma_y} \quad \Rightarrow \quad z = A \cdot X + B \tag{40}$$

$$X = \ln(x - a) \qquad A = \frac{1}{\sigma_y} \qquad B = -\frac{\mu_y}{\sigma_y} \tag{41}$$

ここに，z はプロッティングポジション公式より計算した非超過確率に相当する標準正規分布の % 点である．

上記関係より，

$$\begin{cases} a & : (\text{回帰直線が最大の相関係数を有するときの値 : 試行計算により選定}) \\ \mu_y = -\dfrac{B}{A} & \\ \sigma_y = \dfrac{1}{A} & \end{cases}$$

実際の計算では，初期値を $a = x_{(1)} - \delta$ (δ: 小さい値) として，a の値を減少させながら単回帰分析を行い，相関係数が最大になる a を検索する．

2.3 ピアソン III 型分布 (P3 分布)

水文統計量 x が，ピアソン III 型分布 : Pearson type 3 distribution (ガンマ分布) に従う場合の母数推定方法を示す.

(1) 確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{|a| \cdot \Gamma(b)} \left(\frac{x-c}{a} \right)^{b-1} \cdot \exp\left(-\frac{x-c}{a} \right) \qquad a > 0 : c \leqq x < \infty \tag{42}$$

c は位置母数，a は尺度母数，b は形状母数である.

(2) 確率分布関数

$$F(x) = G\left(\frac{x-c}{a} \right) \qquad G(w) = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^w t^{b-1} \exp(-t) dt \qquad (a > 0) \tag{43}$$

(3) 非超過確率 p に対する水文統計量 x_p

$$w = \frac{x-c}{a} \qquad \rightarrow \qquad x = c + aw \tag{44}$$

$$x_p = c + aw_p \qquad w_p \text{ は } p = G(w) \text{ となる } w \text{ の値} \tag{45}$$

(4) 母数推定 (積率法)

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j \qquad S_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (x_j - \bar{x})^2 \qquad C_{sx} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{x_j - \bar{x}}{S_x} \right)^3 \tag{46}$$

$$\mu_x = \bar{x} \qquad \sigma_x = [N/(N-1)]^{1/2} S_x \qquad \gamma_x = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2} C_{sx} \tag{47}$$

(参考)

不偏ひずみ係数 γ_x については，以下に示す，Bobee と Robitaille による偏り補正した式 (ピアソン III 型分布の場合) も用いられる．( ) 内で B に乗ずるのは C_{sx} の 2 乗であることに注意.

$$\gamma_x = C_{sx}(A + B \cdot {C_{sx}}^2) \tag{48}$$

$$\text{ここに} \qquad A = 1 + 6.51/N + 20.2/N^2 \qquad B = 1.48/N + 6.77/N^2 \tag{49}$$

ここで，積率と母数の関係は以下の通り.

$$\mu_x = c + a \cdot b \qquad {\sigma_x}^2 = a^2 \cdot b \qquad \gamma_x = \frac{2a}{|a|\sqrt{b}} \tag{50}$$

以上より，母数は以下に示す関係より推定する.

$$\begin{cases} b = 4/{\gamma_x}^2 & (b > 0) \\ a = \sigma_x/\sqrt{b} & (\gamma_x < 0 \rightarrow a = -\sigma_x/\sqrt{b} < 0) \\ c = \mu_x - ab \end{cases} \tag{51}$$

ここで，$\gamma_x < 0$ の場合は $a < 0$ であり，w_p は $1-p$ に対する値とすることに注意する.

なお，γ_x の絶対値が小さい場合，対数ピアソン III 型と同じ現象が発生する可能性がある．ただし数値的には未確認.

2.4 対数ピアソン III 型分布 (LP3 分布)

水文統計量 x の対数変換値 $y = \ln x$ が，ピアソン III 型分布に従う場合の母数推定方法を示す．

(1) 確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{|a| \cdot \Gamma(b) \cdot x} \left(\frac{\ln x - c}{a} \right)^{b-1} \cdot \exp\left(-\frac{\ln x - c}{a} \right) \qquad a > 0 : \exp(c) < x < \infty \tag{52}$$

c は位置母数，a は尺度母数，b は形状母数である．

(2) 確率分布関数

$$F(x) = G\left(\frac{\ln x - c}{a} \right) \qquad G(w) = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^w t^{b-1} \exp(-t) dt \qquad (a > 0) \tag{53}$$

(3) 非超過確率 p に対する水文統計量 x_p

$$w = \frac{\ln x - c}{a} \qquad \rightarrow \qquad x = \exp(c + aw) \tag{54}$$

$$x_p = \exp(c + aw_p) \qquad w_p \text{ は } p = G(w) \text{ となる } w \text{ の値} \tag{55}$$

(4) 母数推定 (積率法)

$$y_j = \ln x_j \qquad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} y_j \qquad S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (y_j - \bar{y})^2 \qquad C_{sy} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{y_j - \bar{y}}{S_y} \right)^3 \tag{56}$$

$$\mu_y = \bar{y} \qquad \sigma_y = [N/(N-1)]^{1/2} S_y \qquad \gamma_y = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2} C_{sy} \tag{57}$$

(参考)

不偏ひずみ係数 γ_x については，以下に示す，Bobee と Robitaille による偏り補正した式 (ピアソン III 型分布の場合) も用いられる．( ) 内で B に乗ずるのは C_{sy} の 2 乗であることに注意．

$$\gamma_y = C_{sy}(A + B \cdot {C_{sy}}^2) \tag{58}$$

$$\text{ここに} \qquad A = 1 + 6.51/N + 20.2/N^2 \qquad B = 1.48/N + 6.77/N^2 \tag{59}$$

ここで，積率と母数の関係は以下の通り．

$$\mu_y = c + a \cdot b \qquad {\sigma_y}^2 = a^2 \cdot b \qquad \gamma_y = \frac{2a}{|a|\sqrt{b}} \tag{60}$$

以上より，母数は以下に示す関係より推定する．

$$\begin{cases} b = 4/{\gamma_y}^2 & (b > 0) \\ a = \sigma_y/\sqrt{b} & (\gamma_y < 0 \rightarrow a = -\sigma_y/\sqrt{b} < 0) \\ c = \mu_y - ab \end{cases} \tag{61}$$

ここで，$\gamma_y < 0$ の場合は $a < 0$ であり，w_p は $1 - p$ に対する値とすることに注意する．

なお，γ_y の絶対値が小さい場合，b が非常に大きな数値となり，ガンマ分布の%点計算が収束しないケースもあり得る．このため，b が大きな数値の場合は，以下の示す Wilson-Hilferty 変換により非超過確率 p に対する水文統計量 x_p を算定する．

$$x_p = \exp(\mu_y + \sigma_y \cdot K_p) \qquad K_p = \frac{2}{\gamma_y} \left(1 + \frac{\gamma_y z_p}{6} - \frac{{\gamma_y}^2}{36} \right) - \frac{2}{\gamma_y} \tag{62}$$

ここに，z_p は $N(0,1)$ に従う標準正規変量である．Wilson-Hilferty 変換を用いるか否かの境界は，$b < 10,000$ ば目安になる．ひずみ係数 $\gamma_y < 0$ の場合でも，標準正規変量 z_p は p に対して求めればよいし，また K_p の計算でも，γ_y を $|\gamma_y|$ とする必要な無い．すなわち，p も γ_y も計算値そのままを入力すればよい．

2.5 グンベル分布

水文統計量 x が，グンベル分布 (Gumbel distribution) に従う場合の母数推定方法を示す．

(1) 確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{a}\exp\left[-\frac{x-c}{a} - \exp\left(-\frac{x-c}{a}\right)\right] \qquad -\infty < x < \infty \tag{63}$$

c は位置母数，a は尺度母数である．

(2) 確率分布関数

$$F(x) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-c}{a}\right)\right] \tag{64}$$

(3) 非超過確率 p に対する水文統計量 x_p

$$p = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-c}{a}\right)\right] \qquad \rightarrow \qquad x = c - a\ln[-\ln(p)] \tag{65}$$

$$x_p = c - a\ln[-\ln(p)] \tag{66}$$

(4) 母数推定 (L 積率法)

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{(j)} \qquad b_1 = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{j=1}^{N}(j-1)x_{(j)} \tag{67}$$

ここに，$x_{(j)}$ は N 個の標本を昇順に並べ替えたときの，小さいほうから j 番目の値を示す．

上記 $b_i = \beta_i$ として，以下の関係により λ_i を算定する．

$$\lambda_1 = \beta_0 \qquad \lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0 \tag{68}$$

母数は，以下に示す L 積率と母数の関係により推定する．

$$\begin{cases} a = \lambda_2/\ln 2 \\ c = \lambda_1 - 0.5772a \end{cases} \tag{69}$$

2.6　一般化極値分布 (GEV 分布)

水文統計量 x が，一般化極値分布 (Generalized Extreme Value distribution) に従う場合の母数推定方法を示す．グンベル分布は，一般化極値分布において，$k=0$ の場合と一致する．

(1)　確率密度関数

$$f(x)=\frac{1}{a}\left(1-k\frac{x-c}{a}\right)^{1/k-1}\cdot\exp\left[-\left(1-k\frac{x-c}{a}\right)^{1/k}\right]\qquad(k\neq 0)\tag{70}$$

c は位置母数，a は尺度母数，k は形状母数である．

(2)　確率分布関数

$$F(x)=\exp\left[-\left(1-k\frac{x-c}{a}\right)^{1/k}\right]\qquad(k\neq 0)\tag{71}$$

(3)　非超過確率 p に対する水文統計量 x_p

$$p=\exp\left[-\left(1-k\frac{x-c}{a}\right)^{1/k}\right]\qquad\rightarrow\qquad x=c+\frac{a}{k}\cdot\left\{1-[-\ln(p)]^k\right\}\tag{72}$$

$$x_p=c+\frac{a}{k}\cdot\left\{1-[-\ln(p)]^k\right\}\tag{73}$$

(4)　母数推定 (L 積率法)

$$b_0=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_{(j)}\qquad b_1=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{j=1}^{N}(j-1)x_{(j)}\qquad b_2=\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\sum_{j=1}^{N}(j-1)(j-2)x_{(j)}\tag{74}$$

ここに，$x_{(j)}$ は N 個の標本を昇順に並べ替えたときの，小さいほうから j 番目の値を示す．

上記 $b_i=\beta_i$ として，以下の関係により λ_i を算定する．

$$\lambda_1=\beta_0\qquad\lambda_2=2\beta_1-\beta_0\qquad\lambda_3=6\beta_2-6\beta_1+\beta_0\tag{75}$$

母数は，以下に示す L 積率と母数の関係により推定する．

$$\begin{cases}k=7.8590d+2.9554d^2\qquad\text{ここに}\qquad d=\dfrac{2\lambda_2}{\lambda_3+3\lambda_2}-\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}\\ a=\dfrac{k\lambda_2}{(1-2^{-k})\cdot\Gamma(1+k)}\\ c=\lambda_1-\dfrac{a}{k}\cdot[1-\Gamma(1+k)]\end{cases}\tag{76}$$

2.7 平方根指数型最大値分布 (SQRT-ET 分布)

水文統計量 x が，平方根指数型最大値分布 (SQRT exponential-type distribution of maximum) に従う場合の母数推定方法を示す.

(1) 確率密度関数

$$f(x) = \frac{ab}{2} \exp\left[-\sqrt{bx} - a\left(1+\sqrt{bx}\right)\exp\left(-\sqrt{bx}\right)\right] \qquad (x \geqq 0) \tag{77}$$

(2) 確率分布関数

$$F(x) = \exp\left[-a\left(1+\sqrt{bx}\right)\exp\left(-\sqrt{bx}\right)\right] \qquad (x \geqq 0) \tag{78}$$

(3) 非超過確率 p に対する水文統計量 x_p

$$p = \exp\left[-a\left(1+\sqrt{bx}\right)\exp\left(-\sqrt{bx}\right)\right] = \exp\left[-a(1+t_p)\exp(-t_p)\right] \qquad (t_p = \sqrt{bx}) \tag{79}$$

$$\rightarrow \qquad x = \frac{{t_p}^2}{b} \qquad \ln(1+t_p) - t_p = \ln\left[-\frac{1}{a}\ln(p)\right] \tag{80}$$

$$x_p = \frac{{t_p}^2}{b} \qquad \ln(1+t_p) - t_p = \ln\left[-\frac{1}{a}\ln(p)\right] \tag{81}$$

■(参考) t_p の求め方

$$g(t_p) = \ln(1+t_p) - t_p - \ln\left[-\frac{1}{a}\ln(p)\right] \tag{82}$$

とおくと

$$g'(t_p) = \frac{1}{1+t_p} - 1 \tag{83}$$

であり，関数 $g(t_p)$ は単調減少関数であることがわかる．また，通常，$g(0) > 0$ であるため，Newton-Raphson 法により，以下の繰り返しにより $g(t_p) = 0$ となる t_p を求められる.

$$t_{p(n+1)} = t_{p(n)} - \frac{g(t_{p(n)})}{g'(t_{p(n)})} \qquad (n)\ \text{は繰り返し回数のカウンタ} \tag{84}$$

t_p の初期値としては，非超過確率 p が比較的大きい領域での x_p を知りたいため，標本値 x の最大値を用いて $t_p = \sqrt{b \cdot x_{max}}$ とすることにより，効率的に t_p を求められる.

(4) 母数推定 (最尤法)

母数 a，b は，以下に示す対数尤度関数 L が最大になるように定める.

$$\begin{aligned} L(a,b) &= \sum_{j=1}^{N} \ln f(x_j) \\ &= N\ln a + N\ln b - N\ln 2 - \sum_{j=1}^{N}\sqrt{bx_j} - a\left[\sum_{j=1}^{N}\exp\left(-\sqrt{bx_j}\right) + \sum_{j=1}^{N}\sqrt{bx_j}\exp\left(-\sqrt{bx_j}\right)\right] \end{aligned} \tag{85}$$

上式 L を b に関して偏微分したものが 0 となる条件より，以下のとおり b の関数として a が定まる．これを a_1 とする．

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 0 \qquad \rightarrow \qquad a = \frac{\sum_{j=1}^{N} \sqrt{bx_j} - 2N}{\sum_{j=1}^{N} (bx_j) \exp\left(-\sqrt{bx_j}\right)} = a_1 \tag{86}$$

また，L を a に関して偏微分したものが 0 となる条件より，これも b の関数として a が定まる．これを a_2 とする．

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 0 \qquad \rightarrow \qquad a = \frac{N}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\sqrt{bx_j}\right) + \sum_{j=1}^{N} \sqrt{bx_j} \exp\left(-\sqrt{bx_j}\right)} = a_2 \tag{87}$$

L が最大となるのは $a_1 = a_2$ のときであるため，$h(b) = a_1(b) - a_2(b) = 0$ となる b の値を，二分法で求めることができる．なお，$a_2 > 0$ は保障されるが，a_1 は，以下の条件を満たすときに $a_1 > 0$ となるため，二分法における b の小さい側の初期値を設定する際注意する．

$$a_1 > 0 \qquad \rightarrow \qquad b > \left(\frac{2N}{\sum_{j=1}^{N} \sqrt{x_j}}\right)^2 \tag{88}$$

二分法における b の大きい側の初期値は，経験的に b が 1 程度以下であることから，以下のようにプログラムすれば良い．(C 言語)

```
/* Bisection method */
b1=bb;                             /* a1>0 となる b1 (小さい側初期値) を設定 */
b2=b1+0.5;                         /* 小さい側初期値 b1+0.5 を大きい側初期値 b2 とする */
bb=0.5*(b1+b2);                    /* 中間値 bb の設定 */
f1=FSQR(nd,datax,b1,&a1,&a2); /* h(b1) の計算 */
f2=FSQR(nd,datax,b2,&a1,&a2); /* h(b2) の計算 */
ff=FSQR(nd,datax,bb,&a1,&a2); /* h(bb) の計算 */
do{                                /* 収束計算ループ  */
    if(f1*ff<0.0)b2=bb;
    if(ff*f2<0.0)b1=bb;
    if(ff==0.0)break;
    if(0.0<f1*ff&&0.0<ff*f2){b1=b2;b2=b1+0.5;} /* 見込んだ範囲に解がない場合上側範囲を */
    bb=0.5*(b1+b2);                            /* 0.5 ずつ増加させて解を検索する      */
    f1=FSQR(nd,datax,b1,&a1,&a2);
    f2=FSQR(nd,datax,b2,&a1,&a2);
    ff=FSQR(nd,datax,bb,&a1,&a2);
}while(0.001<fabs(a1-a2));                     /* 収束判定基準：|h(b)|<0.001 */
```

2.8　ワイブル分布 (3 母数)

水文統計量 x が，3 母数ワイブル分布 (Weibull distribution) に従う場合の母数推定方法を示す.

(1)　確率密度関数

$$f(x) = \frac{k}{a}\left(\frac{x-c}{a}\right)^{k-1}\exp\left[-\left(\frac{x-c}{a}\right)^{k}\right] \qquad (k \neq 0) \tag{89}$$

c は位置母数，a は尺度母数，k は形状母数である.

(2)　確率分布関数

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-c}{a}\right)^{k}\right] \qquad (k \neq 0) \tag{90}$$

(3)　非超過確率 p に対する水文統計量 x_p

$$1-p = \exp\left[-\left(\frac{x-c}{a}\right)^{k}\right] \qquad \rightarrow \qquad x = c + a[-\ln(1-p)]^{1/k} \tag{91}$$

$$x_p = c + a[-\ln(1-p)]^{1/k} \tag{92}$$

(4)　母数推定 (L 積率法：合田らの方法 *) による)

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{(j)} \qquad b_1 = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{j=1}^{N}(j-1)x_{(j)} \qquad b_2 = \frac{1}{N(N-1)(N-2)}\sum_{j=1}^{N}(j-1)(j-2)x_{(j)} \tag{93}$$

ここに，$x_{(j)}$ は N 個の標本を昇順に並べ替えたときの，小さいほうから j 番目の値を示す.

上記 $b_i = \beta_i$ として，以下の関係により λ_i を算定する.

$$\lambda_1 = \beta_0 \qquad \lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0 \qquad \lambda_3 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0 \tag{94}$$

母数は，以下に示す L 積率と母数の関係により推定する.

$$\begin{cases} k = 285.3\tau^6 - 658.6\tau^5 + 622.8\tau^4 - 317.2\tau^3 + 98.52\tau^2 - 21.256\tau + 3.5160 \qquad \text{ここに} \quad \tau = \lambda_3/\lambda_2 \\ a = \dfrac{\lambda_2}{(1-2^{-1/k})\cdot\Gamma(1+1/k)} \\ c = \lambda_1 - a\cdot\Gamma(1+1/k) \end{cases} \tag{95}$$

*) 合田良実・久高将信・河合弘泰：L-moments 法を用いた波浪の極値統計解析について，土木学会論文集 B2(海岸工学)，Vol.B2-65 No.1，2009，pp161-165

なお，本文 表-2 極値分布関数の母数推定式 のワイブル分布の項で，形状母数 k の値が λ_3 の関数となっているが，$\tau_3 = \lambda 3/\lambda_2$ と思われる．また尺度母数 A の分母に k が入っているがこれも誤植と思われる.

(5)　母数推定 (最尤法)

この問題では推定すべき母数が 3 個あるため，まず最初に位置母数 c を推定し既知とした上で，形状母数 k と尺度母数 a を推定する方法をとる.

(I) 母数 c の推定

標本値 x の非超過確率 $F(x)$ は，選定したプロッティング・ポジション公式により算定する．プロッティング・ポジション公式を用いるため，標本値 x は，昇順に並べ替えておくことに注意する．

確率分布関数を変形して，

$$1 - F(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-c}{a}\right)^k\right] \tag{96}$$

上式の両辺の対数を 2 回とることにより

$$\ln\{-\ln[1-F(x)]\} = k\ln(x-c) - k\ln a \qquad \rightarrow \qquad Y = A\cdot X + B \tag{97}$$

標本値を $Y_i = \ln\{-\ln[1-F(x_i)]\}, X_i = \ln(x_i - c)$ として直線回帰することにより，$k = A, a = \exp(-B/A)$ として求めることができる．この際，c の値を，標本値の最小値から小さいほうに変化させ，繰り返し回帰を行いながら，直線回帰による相関係数が最大となる時の c を求める c とする．

この段階で，一応 3 母数 k，a，c は求まったことになるが，更に推定精度を上げるため，c のみを固定し，次の段階で再度 k，a を算定する．ここで求めた k は，以降行う Newton-Raphson 法の初期値として利用するが，a は特に必要としない値である．

(II) 母数 k および a の推定

上記により c は定まったため，$t = x - c$ と置くことにより，

$$f(t) = \frac{k}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{k-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^k\right] \tag{98}$$

上式の対数尤度関数 $L = \sum_{i=1}^{N}\ln f(t_i)$ において，以下の条件を満たすよう k および a を Newton-Raphson 法で推定する．k の初期値は，c を求めるときに算定した値を用いればよい．

$$\frac{\partial L}{\partial k} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{k} + \frac{\sum_{i=1}^{N}\ln t_i}{N} - \frac{\sum_{i=1}^{N}[(\ln t_i)\cdot {t_i}^k]}{\sum_{i=1}^{N}{t_i}^k} = 0 \tag{99}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 0 \qquad \rightarrow \qquad a = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N}{t_i}^k}{N}\right)^{1/k} \tag{100}$$

$$g(k) = \frac{1}{k} + \frac{T_0}{N} - \frac{T_2(k)}{T_1(k)} \qquad g'(k) = -\frac{1}{k^2} - \frac{T_3(k)\cdot T_1(k) - [T_2(k)]^2}{[T_1(k)]^2} \tag{101}$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^{N}\ln t_i \qquad T_1(k) = \sum_{i=1}^{N}{t_i}^k \qquad T_2(k) = \sum_{i=1}^{N}[\ln t_i\cdot {t_i}^k] \qquad T_3(k) = \sum_{i=1}^{N}[\ln t_i\cdot\ln t_i\cdot {t_i}^k] \tag{102}$$

k が収束するまで以下の繰り返しを行う．ここに n は繰り返し回数のカウンタである．

$$k_{n+1} = k_n - \frac{g(k_n)}{g'(k_n)} \tag{103}$$

k が定まれば，次式により a が定まる．

$$a = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N}{t_i}^k}{N}\right)^{1/k} \tag{104}$$

2.9 指数分布

水文統計量 x が，指数分布 (Exponential distribution) に従う場合の母数推定方法を示す.

(1) 確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{x-c}{a}\right) \tag{105}$$

c は位置母数，a は尺度母数である.

(2) 確率分布関数

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x-c}{a}\right) \tag{106}$$

(3) 非超過確率 p に対する水文統計量 x_p

$$p = 1 - \exp\left(-\frac{x-c}{a}\right) \qquad \rightarrow \qquad x = c - a\ln(1-p) \tag{107}$$

$$x_p = c - a\ln(1-p) \tag{108}$$

(4) 母数推定 (L 積率法)

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{(j)} \qquad b_1 = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{j=1}^{N}(j-1)x_{(j)} \tag{109}$$

ここに，$x_{(j)}$ は N 個の標本を昇順に並べ替えたときの，小さいほうから j 番目の値を示す.

上記 $b_i = \beta_i$ として，以下の関係により λ_i を算定する.

$$\lambda_1 = \beta_0 \qquad \lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0 \tag{110}$$

母数は，以下に示す L 積率と母数の関係により推定する.

$$\begin{cases} a = 2\lambda_2 \\ c = \lambda_1 - a \end{cases} \tag{111}$$

2.10　一般化パレート分布 (GPD)

水文統計量 x が，一般化パレート分布 (Generalized Pareto distribution) に従う場合の母数推定方法を示す．指数分布は，一般化パレート分布において，$k=0$ の場合と一致する．

(1)　確率密度関数

$$f(x)=\frac{1}{a}\left(1-k\frac{x-c}{a}\right)^{1/k-1} \qquad (k\neq 0) \tag{112}$$

c は位置母数，a は尺度母数，k は形状母数である．

(2)　確率分布関数

$$F(x)=1-\left(1-k\frac{x-c}{a}\right)^{1/k} \qquad (k\neq 0) \tag{113}$$

(3)　非超過確率 p に対する水文統計量 x_p

$$p=1-\left(1-k\frac{x-c}{a}\right)^{1/k} \qquad \rightarrow \qquad x=c+\frac{a}{k}\left\{1-(1-p)^k\right\} \tag{114}$$

$$x_p=c+\frac{a}{k}\cdot\left\{1-(1-p)^k\right\} \tag{115}$$

(4)　母数推定 (L 積率法)

$$b_0=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_{(j)} \qquad b_1=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{j=1}^{N}(j-1)x_{(j)} \qquad b_2=\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\sum_{j=1}^{N}(j-1)(j-2)x_{(j)} \tag{116}$$

ここに，$x_{(j)}$ は N 個の標本を昇順に並べ替えたときの，小さいほうから j 番目の値を示す．

上記 $b_i=\beta_i$ として，以下の関係により λ_i を算定する．

$$\lambda_1=\beta_0 \qquad \lambda_2=2\beta_1-\beta_0 \qquad \lambda_3=6\beta_2-6\beta_1+\beta_0 \tag{117}$$

母数は，以下に示す L 積率と母数の関係により推定する．

$$\begin{cases} k=\dfrac{\lambda_2-3\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3} \\ a=(1+k)(2+k)\lambda_2 \\ c=\lambda_1-(2+k)\lambda_2 \end{cases} \tag{118}$$

3.　適合度評価法

3.1　相関係数

選定した確率分布モデルの適合性を確認するため，Q-Q (quantile-quantile) プロットが用いられ，その中には相関係数が記載される．

$$r = \frac{N\sum X_i Y_i - \sum X_i \cdot \sum Y_i}{\sqrt{[N\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2] \cdot [N\sum {Y_i}^2 - (\sum Y_i)^2]}}$$

ここに，　r　：相関係数

N　：標本のデータ数

X_i　：観測値

Y_i　：選定した確率分布より計算された値

3.2　SLSC

$$\mathrm{SLSC} = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{j=N} (s_j - r_j)}}{|r_{0.99} - r_{0.01}|} \tag{119}$$

s_i　Normalized variable by parameters

r_i　Normalized variable by Plotting position formula

$r_{0.99}$　Normalized value corresponding to the non-exceedance probability of 99%

$r_{0.01}$　Normalized value corresponding to the non-exceedance probability of 1%

Distribution	S_i	r_i
LN3	$\dfrac{\ln(x_i - a) - \mu_y}{\sigma_y}$	$qnorm(p_i)$ (%-point of SND)
LP3	$\dfrac{\ln x_i - c}{a}$	$qgamma(p_i, shape = b, rate = 1)$ (%-point of Gamma Distribution)
Gumbel	$\exp\left(-\dfrac{x_i - c}{a}\right)$	$-\ln(p_i)$
GEV	$\left(1 - k\dfrac{x_i - c}{a}\right)^{1/k}$	$-\ln(p_i)$
SQRT-ET	$a \cdot \exp\{\ln(1 + \sqrt{bx_i}) - \sqrt{bx_i}\}$	$-\ln(p_i)$
Weibull	$\left(\dfrac{x_i - c}{a}\right)^k$	$-\ln(1 - p_i)$
Exponential	$\dfrac{x_i - c}{a}$	$-\ln(1 - p_i)$
GPD	$-\dfrac{1}{k} \cdot \ln\left(1 - k \cdot \dfrac{x_i - c}{a}\right)$	$-\ln(1 - p_i)$

4. ジャックナイフ法による推定

Jackknife 法による偏りを補正した推定値 (JackKnife 推定値) と標準誤差の推定値の計算方法を示す．手順は以下の通り．

① N 個のデータ $x_{(i)}$ を用いて統計量の推定値 $\hat{\theta}$ を求める．

② i 番目のデータを除いた $N-1$ 個のデータによる推定値 $\hat{\theta}_{(i)}$ を求める．

③ $n-1$ 個のデータによる推定値 $\hat{\theta}_{(i)}$ は N 個求められるため，これらの平均 $\hat{\theta}_{(\cdot)}$ を求める．

$$\hat{\theta}_{(\cdot)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\theta}_{(i)} \tag{120}$$

④ N 個のデータ $x_{(i)}$ を用いて求めた統計量の推定値 $\hat{\theta}$ と，$N-1$ 個のデータによる推定値の平均 $\hat{\theta}_{(\cdot)}$ を用いて，以下の式で jackknife 推定値 $\bar{\theta}$ を求める．

$$\bar{\theta} = N\cdot\hat{\theta} - (N-1)\cdot\hat{\theta}_{(\cdot)} \tag{121}$$

⑤ θ の標準誤差の推定値 (SE) は，以下の通り与えられる．

$$(SE) = \sqrt{\frac{N-1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta}_{(\cdot)}\right)^2} \tag{122}$$

5. ブートストラップ法による推定

bootstrap 法による点推定と区間推定の方法を述べる．

① 原データとして N 個のデータ $x_{(i)}$ をセットする．

② 元の N 個のデータから繰り返しを許して N 個のデータを無作為に抽出しこれの推定値 $\theta*_{(i)}$ を求める．

③ $\theta*_{(i)}$(bootstrap 反復値) を B 個求め，これらの平均を bootstrap 法による点推定とする．

$$\hat{\theta*} = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\theta*_{(i)} \tag{123}$$

④ bootstrap 反復値の分布は，母数の分布を表していると考えられるため，bootstrap 反復値を最小値から最大値まで昇順に並べ，反復値が所要の下側確率・上側確率となる限界を見つけ，これを信頼限界とする．この方法は，母数の分布を正規分布と仮定する必要はない．この方法はパーセンタイル法 (percentile method) と呼ぶ．

6. 棄却検定

ある特定の分布に従う標本の中に，希にしか起こらない特に大きな値あるいは小さな値が含まれている場合，これを同一母集団のデータとして採用すべきか棄却してよいかの検定を行う手順を述べる.

課題 ある母集団から採取した N 個の標本値に対し，その最大値を検定対象値 x_ϵ として棄却検定を行う.

① 危険率 β_0 に対する棄却限界 ϵ_0 の値を求める.

$$\epsilon_0 = 1 - (1 - \beta_0)^{1/N} \qquad (\beta \text{ は通常 } 5\%) \tag{124}$$

② 検定対象値を除いた $N-1$ 個のデータより確率分布の母数推定を行い，確率分布関数 $F(x)$ を推定する.

③ 推定した確率分布関数より，検定対象値の上側確率 (超過確率)q を推定する.

④ 検定対象値の上側確率が等しくなる標準正規分布の % 点を算定し，これを u_ϵ とする．すなわち以下の関係を満足する u_ϵ を求める．ここに Φ は標準正規分布の確率分布関数である.

$$\text{上側確率} \quad q = 1 - F(x_\epsilon) = 1 - \Phi(u_\epsilon) \tag{125}$$

⑤ 検定対象値が他の $N-1$ 個の標本値と同一の母集団であるなら，次式で表される F 値は自由度 $(1, M-1)$ の F 分布に従うはずである．ここに，$M(=N-1)$ は検定対象値を除いたデータ数であることに注意.

$$F = \left(\frac{M-1}{M+1}\right) \cdot {u_\epsilon}^2 \tag{126}$$

よって以下を満足する F 分布の上側確率 2ϵ を求める.

$$F^1_{M-1}(2\epsilon) = \left(\frac{M-1}{M+1}\right) \cdot {u_\epsilon}^2 \tag{127}$$

⑥ 検定対象値より定めた ϵ と棄却限界 ϵ_0 を比較し，以下の判定を行う.

$$\begin{cases} \epsilon \leqq \epsilon_0 & \text{棄却限界より検定対象値の上側確率は小さく} \\ & \text{検定対象値は棄却できる (解析に用いない)} \\ \epsilon > \epsilon_0 & \text{棄却限界より検定対象値の上側確率は大きく} \\ & \text{検定対象値は棄却できない (解析に用いる)} \end{cases} \tag{128}$$

(注意)

正規分布ではない確率分布に適用するための工夫

F 分布を用いた異常値の棄却検定は，正規分布理論に基づくものです．このため，正規分布以外の確率分布に F 分布を用いた検定手法を適用するため，上記②③④のステップを採用しています．これは，採用した確率分布における検定対象点の上側確率が，標準正規分布の上側確率と等しくなるよう，標準正規分布での % 点を求める手順です.

参考文献

◯ 星清：水文統計解析，開発土木研究所月報，No.540，1998 年 5 月

◯ 星清：現場のための水文統計 (1)，開発土木研究所月報，No.540，1998 年 5 月

◯ 星清・新目竜一・宮原雅幸：現場のための水文統計 (2)，開発土木研究所月報，No.541，1998 年 6 月

◯ 合田良実・久高将信・河合弘泰：L-moments 法を用いた波浪の極値統計解析について，土木学会論文集 B2(海岸工学)，Vol.B2-65 No.1，2009，pp161-165

◯ Derek A. Roff(著)・野間口眞太郎 (訳)：生物学のための計算統計学　–最尤法，ブートストラップ法，無作為化法–，共立出版株式会社，2011 年 3 月 10 日

◯ KADOYA Mutsumi : Application of Extreme Value Distribution in Hydrologic Frequency Analysis Part II. Singular Hydrologic Amount and Rejection Test, Citation Bulletins - Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University (1964), 66: 33-44, 1964-03-25 (URL http://hdl.handle.net/2433/123738)