2012 年 7 月 11 日

有限要素法による２次元応力解析
— No-tension 材料の考慮 —

目次

1. 2 次元弾性問題の剛性方程式 1
- 1.1 仮想仕事の原理による釣合式の表示 . . . 1
- 1.2 要素剛性方程式 . . . 2

2. ４節点パラメトリック要素 5
- 2.1 ひずみ-変位関係行列 $[\boldsymbol{B}]$ の導入 . . . 5
- 2.2 要素剛性行列および節点力ベクトル . . . 6
- 2.3 要素応力の算定 . . . 7
- 2.4 物体力による節点力 . . . 7

3. 2 次元弾性応力解析の No-tension 解析への拡張 8
- 3.1 解析の基本手順 . . . 8
- 3.2 引張応力成分除去の方法 . . . 11
- 3.3 収束の考え方 . . . 13

4. モデル解析 14
- 4.1 単純モデルによる機能確認 . . . 14
- 4.2 片持梁の曲げ応力 . . . 19
- 4.3 多重円環理論と No-tension 解析結果の比較 . . . 20

5. プログラミング 22
- 5.1 プログラムの特徴 . . . 22
- 5.2 データ入力書式（csv 形式） . . . 22
- 5.3 出力ファイル書式（csv 形式） . . . 23
- 5.4 収束判定と収束状況記録ファイル . . . 24
- 5.5 Sub プロシージャ一覧 . . . 25

付録 A 三角形定ひずみ要素の剛性方程式 29
- A.1 変位関数 . . . 29
- A.2 ひずみ-変位関係行列 . . . 30
- A.3 要素剛性行列および節点力ベクトル . . . 30
- A.4 物体力による節点力 . . . 30

付録 B 軸対称４節点パラメトリック要素 33
- B.1 軸対称問題における応力-ひずみ関係とひずみ-変位関係 . . . 33
- B.2 ひずみ-変位関係行列 $[\boldsymbol{B}]$ の導入 . . . 33
- B.3 要素剛性行列および内力ベクトル . . . 35
- B.4 解析事例 (1)：理論解との比較 . . . 36
- B.5 解析事例 (2)：2 次元 FEM との比較 . . . 37

1. 2 次元弾性問題の剛性方程式

1.1 仮想仕事の原理による釣合式の表示

2 次元弾性体が釣合状態にある時，直交座標系 x-y において，以下の関係が成立している．

物体内部	$\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+X_B=0$	$\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+Y_B=0$
物体表面	$S_x=\sigma_x\cdot\ell+\tau_{xy}\cdot m$	$S_y=\sigma_y\cdot m+\tau_{xy}\cdot\ell$

ここに，　σ_x，σ_y，τ_{xy}　：内部応力の成分
X_B，Y_B　：物体力
S_x，S_y　：表面力
ℓ，m　：境界上法線の方向余弦

釣り合い状態にある場合は任意の仮想変位 δu および δv に対し，次の仮想仕事の式が成り立つ．

$$\int_A\left[\delta u\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+X_B\right)+\delta v\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+Y_B\right)\right]dA=0 \tag{1}$$

式 (1) は，部分積分公式 $f\cdot g'=(f\cdot g)'-f'\cdot g$ を用いて，式 (2) の通り変形できる．

$$\begin{aligned}0=&\int_A\left[\frac{\partial(\delta u\cdot\sigma_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\delta u\cdot\tau_{xy})}{\partial y}+\frac{\partial(\delta v\cdot\sigma_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\delta v\cdot\tau_{xy})}{\partial x}\right]dA\\&-\int_A\left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial x}\sigma_x+\frac{\partial(\delta u)}{\partial y}\tau_{xy}+\frac{\partial(\delta v)}{\partial y}\sigma_y+\frac{\partial(\delta v)}{\partial x}\tau_{xy}\right]dA\\&+\int_A(\delta u\cdot X_B+\delta v\cdot Y_B)\,dA\end{aligned} \tag{2}$$

式 (2) 右辺第 1 項は，Green の公式

$$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dA=\int_C\left(P\frac{\partial x}{\partial n}+Q\frac{\partial y}{\partial n}\right)ds$$

を用いて，以下の通り変形できる．

$$\begin{aligned}&\int_A\left[\frac{\partial(\delta u\cdot\sigma_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\delta u\cdot\tau_{xy})}{\partial y}+\frac{\partial(\delta v\cdot\sigma_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\delta v\cdot\tau_{xy})}{\partial x}\right]dA\\&=\int_s\left(\delta u\cdot\sigma_x\cdot\frac{\partial x}{\partial n}+\delta u\cdot\tau_{xy}\cdot\frac{\partial y}{\partial n}+\delta v\cdot\sigma_y\cdot\frac{\partial y}{\partial n}+\delta v\cdot\tau_{xy}\cdot\frac{\partial x}{\partial n}\right)ds\\&=\int_s[\delta u(\sigma_x\cdot\ell+\tau_{xy}\cdot m)+\delta v(\sigma_y\cdot m+\tau_{xy}\cdot\ell)]ds\\&=\int_s(\delta u\cdot S_x+\delta v\cdot S_y)ds\end{aligned} \tag{3}$$

また，ひずみ-変位関係

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\epsilon_x\qquad\frac{\partial v}{\partial y}=\epsilon_y\qquad\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\tau_{xy}$$

より，式 (2) 右辺第 2 項は，

$$\int_A\left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial x}\sigma_x+\frac{\partial(\delta u)}{\partial y}\tau_{xy}+\frac{\partial(\delta v)}{\partial y}\sigma_y+\frac{\partial(\delta v)}{\partial x}\tau_{xy}\right]dA=\int_A(\delta\epsilon_x\sigma_x+\delta\epsilon_y\sigma_y+\delta\gamma_{xy}\tau_{xy})dA \tag{4}$$

よって，仮想仕事の式は最終的に以下の形となる．

$$\int_A(\delta\epsilon_x\sigma_x+\delta\epsilon_y\sigma_y+\delta\gamma_{xy}\tau_{xy})dA=\int_s(\delta uS_x+\delta vS_y)ds+\int_A(\delta uX_B+\delta vY_B)dA \tag{5}$$

式 (5) をベクトル表示すると以下の通り.

$$\int_A \{\boldsymbol{\delta\epsilon}\}^T\{\boldsymbol{\sigma}\}dA = \int_s \{\boldsymbol{\delta u}\}^T\{\boldsymbol{S}\}ds + \int_A \{\boldsymbol{\delta u}\}^T\{\boldsymbol{F}\}dA \tag{6}$$

一般に 3 次元問題であっても，釣り合い状態にあるなら式 (6) の面積積分を体積積分（$A \to V$）に，線積分を面積積分（$s \to A$）とすることにより以下が成り立つ.

$$\int_V \{\boldsymbol{\delta\epsilon}\}^T\{\boldsymbol{\sigma}\}dV = \int_A \{\boldsymbol{\delta u}\}^T\{\boldsymbol{S}\}dA + \int_V \{\boldsymbol{\delta u}\}^T\{\boldsymbol{F}\}dV \tag{7}$$

板厚を考える場合，考える領域の板厚が一定値（$= t$）であれば，その方向を z 方向として，

$$\int_V \{\boldsymbol{\delta\epsilon}\}^T\{\boldsymbol{\sigma}\}dV = \int_0^t \left(\int_A \{\boldsymbol{\delta\epsilon}\}^T\{\boldsymbol{\sigma}\}dA\right) dz = t \cdot \int_A \{\boldsymbol{\delta\epsilon}\}^T\{\boldsymbol{\sigma}\}dA$$

となり，式 (6) の両辺に板厚 t を乗じればよいことになる.

1.2 要素剛性方程式

■板厚について

実際の解析では平面応力状態で板厚の異なる要素を組み合わせた場合も考えられるため，以降各要素は一定の板厚 t を持つものとして式展開を進める.

(1) 一般式

ここで，内挿関数 $[\boldsymbol{N}]$ を適切に選定し，要素内任意点の変位 $\{\boldsymbol{u}\}$ および要素任意点のひずみ $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$ が，節点変位 $\{\boldsymbol{u_{nd}}\}$ を用いて以下のように表現できるものとする.

$$\{\boldsymbol{u}\} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\} \tag{8}$$
$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\} \tag{9}$$

上記関係を用い，仮想仕事の式 (6) を節点変位 $\{\boldsymbol{u_{nd}}\}$ を用いて表記すると

$$\{\boldsymbol{\delta u_{nd}}\}\int_A [\boldsymbol{B}]^T\{\boldsymbol{\sigma}\}dA = \{\boldsymbol{\delta u_{nd}}\}\int_s [\boldsymbol{N}]^T\{\boldsymbol{S}\}ds + \{\boldsymbol{\delta u_{nd}}\}\int_A [\boldsymbol{N}]^T\{\boldsymbol{F}\}dA \tag{10}$$

よって釣合式は以下の通りとなる.

$$\int_A [\boldsymbol{B}]^T\{\boldsymbol{\sigma}\}dA = \int_s [\boldsymbol{N}]^T\{\boldsymbol{S}\}ds + \int_A [\boldsymbol{N}]^T\{\boldsymbol{F}\}dA \tag{11}$$

ここで，応力-ひずみ関係行列 $[\boldsymbol{D_e}]$ を導入し，要素内板厚を一定値 t とすることにより，一般に知られている以下の要素剛性方程式が得られる.

$$\{\boldsymbol{f_{nd}}\} = [\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\} \tag{12}$$
$$[\boldsymbol{k}] = t \cdot \int_A [\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{D_e}][\boldsymbol{B}]dA$$
$$\{\boldsymbol{f_{nd}}\} = t \cdot \int_s [\boldsymbol{N}]^T\{\boldsymbol{S}\}ds + t \cdot \int_A [\boldsymbol{N}]^T\{\boldsymbol{F}\}dA$$
$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\}$$
$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{D_e}]\{\boldsymbol{\epsilon}\} = [\boldsymbol{D_e}][\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\}$$

ここに，

$\{\boldsymbol{f_{nd}}\}$	: 節点外力ベクトル	$[\boldsymbol{k}]$	: 要素剛性行列
$\{\boldsymbol{u_{nd}}\}$	: 節点変位ベクトル	$[\boldsymbol{B}]$	: 節点変位-要素任意点ひずみ関係行列
A	: 要素面積	t	: 要素板厚
$\{\boldsymbol{\epsilon}\}$	: 要素任意点ひずみ	$\{\boldsymbol{\sigma}\}$	: 要素任意点応力
$[\boldsymbol{D_e}]$	: 応力-ひずみ関係行列	$[\boldsymbol{N}]$	: 内挿関数
$\{\boldsymbol{S}\}$	: 要素表面力	$\{\boldsymbol{F}\}$	: 要素任意点物体力

■要素表面力による節点外力ベクトル

要素任意表面の表面力 $\{\boldsymbol{S}\}$ による節点外力ベクトル $(t\cdot\int_C[\boldsymbol{N}]^T\{\boldsymbol{S}\}ds)$ の成分は，等価節点外力として直接入力できる．

■物体力ベクトル

要素内任意点に作用する物体力（ここでは慣性力とする）$\{\boldsymbol{F}\}=\{F_{Bx},F_{By}\}^T$ は物体力に関わる節点力ベクトル $\{w\}$ と内挿関数 $[\boldsymbol{N}]$ を用い以下の通り表せる．

$$\{\boldsymbol{F}\}=[\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{w}\} \tag{13}$$

よって物体力（慣性力）による等価節点外力ベクトル $\{\boldsymbol{F_B}\}$ は，

$$\{\boldsymbol{F_B}\}=t\cdot\int_A[\boldsymbol{N}]^T\{\boldsymbol{F}\}dA=t\cdot\int_A[\boldsymbol{N}]^T[\boldsymbol{N}]dA\cdot\{\boldsymbol{w}\} \tag{14}$$

として算定される．

(2)　初期ひずみを考慮する場合

温度などによる初期ひずみ $\{\boldsymbol{\epsilon_0}\}$ が存在する場合，要素応力は以下の通りとなる．

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{D_e}]\{\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon_0}\}=[\boldsymbol{D_e}][\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\}-[\boldsymbol{D_e}]\{\boldsymbol{\epsilon_0}\} \tag{15}$$

よって，初期ひずみによる節点外力ベクトルに相当する節点力 $\{\boldsymbol{T_{nd}}\}$ は，

$$\{\boldsymbol{T_{nd}}\}=t\cdot\int_A[\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{D_e}]\{\boldsymbol{\epsilon_0}\}dA \tag{16}$$

となり，初期ひずみを考慮した剛性方程式は，以下の通りとなる．

$$\{\boldsymbol{f_{nd}}\}=[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\}-\{\boldsymbol{T_{nd}}\} \tag{17}$$

上式より節点変位は，

$$\{\boldsymbol{u_{nd}}\}=[\boldsymbol{k}]^{-1}\{\boldsymbol{f_{nd}}+\boldsymbol{T_{nd}}\} \tag{18}$$

として求まるが，この節点変位から算定した応力は，初期ひずみを外力として加えた影響を含んでいる．このため，構造系の応力は，上記節点変位より算定した応力から初期ひずみ相当応力を差し引いたもの，すなわち式 (15) より算定したものとする必要がある．

(3)　応力-ひずみ関係

一般に 3 次元問題における等方均質弾性体の応力-ひずみ関係は，弾性係数を E，ポアソン比を ν，材料の線膨張係数を α，温度変化量を T として以下の通りである（Hooke の法則）．

$$\epsilon_x-\alpha T=\frac{1}{E}[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)]\qquad \epsilon_y-\alpha T=\frac{1}{E}[\sigma_y-\nu(\sigma_z+\sigma_x)]\qquad \epsilon_z-\alpha T=\frac{1}{E}[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\qquad \gamma_{yz}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}\qquad \gamma_{zx}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx}$$

ここで $x-y$ 平面上を考える．平面応力状態では，

$$\sigma_z=0\qquad \tau_{yz}=0\qquad \tau_{zx}=0$$

であるため，

$$\epsilon_x-\alpha T=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)\qquad \epsilon_y-\alpha T=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)\qquad \gamma_{xy}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

$$\Longrightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\epsilon_x-\alpha T\\ \epsilon_y-\alpha T\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

平面ひずみ状態では，

$$\epsilon_z = 0 \rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) - E\alpha T \qquad \tau_{yz} = 0 \qquad \tau_{zx} = 0$$

であるため，

$$\epsilon_x - \alpha T = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y] \qquad \epsilon_y - \alpha T = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x] \qquad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

$$\Longrightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x - (1+\nu)\alpha T \\ \epsilon_y - (1+\nu)\alpha T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

となる．これらの関係を再整理すると以下の通りとなる．

■２次元問題での応力とひずみの成分

$$\text{応力成分} : \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \text{ひずみ成分} : \{\boldsymbol{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\text{平面応力温度ひずみ成分} : \{\boldsymbol{\epsilon_0}\} = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{平面ひずみ温度ひずみ成分} : \{\boldsymbol{\epsilon_0}\} = \begin{Bmatrix} (1+\nu)\alpha T \\ (1+\nu)\alpha T \\ 0 \end{Bmatrix}$$

応力・ひずみの符号は，引張を正とし，温度の符号は温度上昇を正とする．

■２次元問題での応力-ひずみ関係式

$$\text{平面応力} : [\boldsymbol{D_e}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{ll} E & : \text{弾性係数} \\ \nu & : \text{ポアソン比} \end{array}$$

$$\text{平面ひずみ} : [\boldsymbol{D_e}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

2. 4節点パラメトリック要素

2.1 ひずみ-変位関係行列 $[\boldsymbol{B}]$ の導入

四角形要素内任意点の変位 u,v を以下のように仮定する．ここに座標 (a,b) は $[-1,1]$ の範囲を有する正規化パラメータ座標，$u_{i,j,k,l}$ および $v_{i,j,k,l}$ は要素を構成する節点の変位を示す．

$$
\begin{aligned}
u =& N_1(a,b)\cdot u_i + N_2(a,b)\cdot u_j + N_3(a,b)\cdot u_k + N_4(a,b)\cdot u_l \\
v =& N_1(a,b)\cdot v_i + N_2(a,b)\cdot v_j + N_3(a,b)\cdot v_k + N_4(a,b)\cdot v_l
\end{aligned}
$$

要素内任意点の変位を $\{\boldsymbol{u}\}$，節点変位を $\{\boldsymbol{u_{nd}}\}$ とすれば，

$$
\{\boldsymbol{u}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_l \\ v_l \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\} \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
N_1 =& \frac{1}{4}(1-a)(1-b) \qquad N_2 = \frac{1}{4}(1+a)(1-b) \\
N_3 =& \frac{1}{4}(1+a)(1+b) \qquad N_4 = \frac{1}{4}(1-a)(1+b)
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_1}{\partial a} = -\frac{1}{4}(1-b) \qquad \frac{\partial N_2}{\partial a} = +\frac{1}{4}(1-b) \qquad \frac{\partial N_3}{\partial a} = +\frac{1}{4}(1+b) \qquad \frac{\partial N_4}{\partial a} = -\frac{1}{4}(1+b) \\
&\frac{\partial N_1}{\partial b} = -\frac{1}{4}(1-a) \qquad \frac{\partial N_2}{\partial b} = -\frac{1}{4}(1+a) \qquad \frac{\partial N_3}{\partial b} = +\frac{1}{4}(1+a) \qquad \frac{\partial N_4}{\partial b} = +\frac{1}{4}(1-a)
\end{aligned} \tag{21}
$$

要素内任意点のひずみ $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$ は，節点変位 $\{\boldsymbol{u_{nd}}\}$ を用いて，

$$
\{\boldsymbol{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_4}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & \dfrac{\partial N_4}{\partial y} & \dfrac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_l \\ v_l \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\} \tag{22}
$$

ここで，内挿関数 N_i に関する微分は，Jacobi 行列 $[J]$ を用いて以下の通り表せる．

$$
\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial a} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial b} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial a} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial b} \end{Bmatrix} \tag{23}
$$

$$
[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial a} \\ \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial N_i}{\partial a} x_i \right) & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial N_i}{\partial a} y_i \right) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial N_i}{\partial b} x_i \right) & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial N_i}{\partial b} y_i \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \tag{24}
$$

$$
[J]^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \qquad \det(J) = J_{11}\cdot J_{22} - J_{12}\cdot J_{21} \tag{25}
$$

式 (22)(24) より，

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{\det(J)}\left\{J_{22}\frac{\partial N_i}{\partial a} - J_{12}\frac{\partial N_i}{\partial b}\right\} \qquad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{\det(J)}\left\{-J_{21}\frac{\partial N_i}{\partial a} + J_{11}\frac{\partial N_i}{\partial b}\right\} \tag{26}$$

式 (24) の (x_i,y_i) を要素節点の座標とすれば，式 (21)(24) より $[J]$ の要素が定まる．また，$[J]$ が定まれば，式 (21)(25)(26) より，式 (22) で示されるひずみ-変位関係行列 $[\boldsymbol{B}]$ が定まる．

なお，この段階では $[\boldsymbol{B}]$ は変数 a および b の関数として定義されていることに注意する．

以下に $[J]$ の要素を示しておく．ここに $x_{i,j,k,l}$ および $y_{i,j,k,l}$ は要素を構成する節点座標である．

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \frac{\partial N_1}{\partial a}x_i + \frac{\partial N_2}{\partial a}x_j + \frac{\partial N_3}{\partial a}x_k + \frac{\partial N_4}{\partial a}x_l \\
J_{12} &= \frac{\partial N_1}{\partial a}y_i + \frac{\partial N_2}{\partial a}y_j + \frac{\partial N_3}{\partial a}y_k + \frac{\partial N_4}{\partial a}y_l \\
J_{21} &= \frac{\partial N_1}{\partial b}x_i + \frac{\partial N_2}{\partial b}x_j + \frac{\partial N_3}{\partial b}x_k + \frac{\partial N_4}{\partial b}x_l \\
J_{22} &= \frac{\partial N_1}{\partial b}y_i + \frac{\partial N_2}{\partial b}y_j + \frac{\partial N_3}{\partial b}y_k + \frac{\partial N_4}{\partial b}y_l
\end{aligned}$$

2.2 要素剛性行列および節点力ベクトル

4 節点パラメトリック要素の剛性行列 $[\boldsymbol{k}]$ は，要素の板厚を一定値 t とし，応力-ひずみ関係行列を $[\boldsymbol{D_e}]$ とすれば以下の通りとなる．

$$[\boldsymbol{k}] = t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{D_e}][\boldsymbol{B}]\cdot\det(J)\cdot da\cdot db \tag{27}$$

また，初期ひずみ $\{\boldsymbol{\epsilon_0}\}$ による節点力ベクトル $\{\boldsymbol{T_{nd}}\}$ および要素応力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ による内力ベクトル $\{\boldsymbol{R_{nd}}\}$ は以下の通りとなる．

$$\{\boldsymbol{T_{nd}}\} = t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{D_e}]\{\boldsymbol{\epsilon_0}\}\cdot\det(J)\cdot da\cdot db \tag{28}$$

$$\{\boldsymbol{R_{nd}}\} = t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[\boldsymbol{B}]^T\{\boldsymbol{\sigma}\}\cdot\det(J)\cdot da\cdot db \tag{29}$$

■温度変化による初期ひずみ

$$\text{平面応力}:\{\boldsymbol{\epsilon_0}\} = \begin{Bmatrix}\alpha T_p\\ \alpha T_p\\ 0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\alpha\cdot(N_1\cdot\phi_i + N_2\cdot\phi_j + N_3\cdot\phi_k + N_4\cdot\phi_l)\\ \alpha\cdot(N_1\cdot\phi_i + N_2\cdot\phi_j + N_3\cdot\phi_k + N_4\cdot\phi_l)\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\text{平面ひずみ}:\{\boldsymbol{\epsilon_0}\} = \begin{Bmatrix}(1+\nu)\alpha T_p\\ (1+\nu)\alpha T_p\\ 0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}(1+\nu)\cdot\alpha\cdot(N_1\cdot\phi_i + N_2\cdot\phi_j + N_3\cdot\phi_k + N_4\cdot\phi_l)\\ (1+\nu)\cdot\alpha\cdot(N_1\cdot\phi_i + N_2\cdot\phi_j + N_3\cdot\phi_k + N_4\cdot\phi_l)\\ 0\end{Bmatrix}$$

ここに，α は線膨張係数，ν はポアソン比，T_p は要素任意点の温度変化量，$\{\phi_i \;\; \phi_j \;\; \phi_k \;\; \phi_l\}^T$ は節点温度変化量，$[N_1 \;\; N_2 \;\; N_3 \;\; N_4]$ は $[\boldsymbol{N}]$ の要素である．また，温度変化量の符号は，温度上昇を正とする．

積分は以下に示す Gauss 積分により行う．

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(a,b)\cdot da\cdot db \doteqdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_i\cdot H_j\cdot f(a_i,b_j) \tag{30}$$

上式より

$$[\boldsymbol{k}] \doteqdot t \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_i \cdot H_j \cdot [\boldsymbol{B}(a_i,b_j)]^T[\boldsymbol{D_e}][\boldsymbol{B}(a_i,b_j)] \cdot \det(J(a_i,b_j)) \tag{31}$$

$$\{\boldsymbol{T_{nd}}\} \doteqdot t \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_i \cdot H_j \cdot [\boldsymbol{B}(a_i,b_j)]^T[\boldsymbol{D_e}]\{\boldsymbol{\epsilon_0}\} \cdot \det(J(a_i,b_j)) \tag{32}$$

$$\{\boldsymbol{R_{nd}}\} \doteqdot t \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_i \cdot H_j \cdot [\boldsymbol{B}(a_i,b_j)]^T\{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \det(J(a_i,b_j)) \tag{33}$$

ここで，積分点を 4 点 ($n=2$) とすれば，a，b および重み H の値は下表の通りであり，a，b を変化させた 4 回の値の総和が積分の近似値となる．

i	j	a	b	H
1	1	-0.5773502692	-0.5773502692	1.0000000000
1	2	$+0.5773502692$	-0.5773502692	1.0000000000
2	1	$+0.5773502692$	$+0.5773502692$	1.0000000000
2	2	-0.5773502692	$+0.5773502692$	1.0000000000

2.3 要素応力の算定

要素の応力は $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ は，節点変位 $\{\boldsymbol{u}\}$ を用いて以下の通り表される．

$$\{\boldsymbol{\sigma}(a_i,b_j)\} = [\boldsymbol{D_e}][\boldsymbol{B}(a_i,b_j)]\{\boldsymbol{u_{nd}}\} \tag{34}$$

ここで，ひずみ-変位関係行列 $[\boldsymbol{B}]$ は a および b の関数であるため，$\{\boldsymbol{\sigma}\}$ も a および b の関数として表現されている．このため，4 積分点要素の場合，4 つの積分点での応力が定まる．

2.4 物体力による節点力

要素内任意点に作用する物体力（ここでは慣性力とする）$\{\boldsymbol{F}\} = \{F_{Bx}, F_{By}\}^T$ は物体力に関わる節点力ベクトル $\{w\}$ と内挿関数 $[\boldsymbol{N}]$ を用い以下の通り表せる．

$$\{\boldsymbol{F}\} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{w}\} \tag{35}$$

$$[\boldsymbol{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{36}$$

$$\{\boldsymbol{w}\} = \gamma \cdot \begin{Bmatrix} k_h & k_v & k_h & k_v & k_h & k_v & k_h & k_v \end{Bmatrix}^T \tag{37}$$

ここに γ は要素の単位体積重量（質量 × 重力加速度），k_h および k_v は水平方向・鉛直方向の慣性力の係数（重力加速度に対する比率）である．

以上より，物体力（慣性力）による等価節点外力ベクトル $\{\boldsymbol{F_B}\}$ は，

$$\{\boldsymbol{F_B}\} = t \cdot \int_A [\boldsymbol{N}]^T\{\boldsymbol{F}\}dA = t \cdot \gamma \cdot \int_A [\boldsymbol{N}]^T[\boldsymbol{N}]dA \cdot \{\boldsymbol{w'}\} \tag{38}$$

として算定する．ここでベクトル $\{\boldsymbol{w}\}$ については γ をくくり出すとにより，

$$\{\boldsymbol{w'}\} = \begin{Bmatrix} k_h & k_v & k_h & k_v & k_h & k_v & k_h & k_v \end{Bmatrix}^T \tag{39}$$

とおいた．

3. 2 次元弾性応力解析の No-tension 解析への拡張

3.1 解析の基本手順

引張に抵抗しない材料を含む構造の解析手法として，Zienkiewicz らが提案した応力遷移法を用いる．この手法は，当初作成した線形弾性剛性行列および応力の座標変換のみで No-tension の釣り合い状態を得るものである．また，No-tension 状態となった要素では，ポアソン比を 0 としている．

No-tension 材料のイメージは，発生応力が材料の引張強度を超過した場合，引張応力は分担しないとするものであり，例えばコンクリートの発生応力が引張強度以下の場合は引張応力を受け持つが，発生応力が引張強度を超過しひび割れが発生した後は引張応力を受け持たなくなる挙動を想定している．

基本的な解析手順は，以下の通り．この手順では，No-tension 状態が発生しない場合でも，最低 2 回の計算が行われる．

No-tension 解析の基本手順

① 剛性行列 $[\boldsymbol{k}]$ の組立．

② 初期の不平衡力 $\{\boldsymbol{\Delta f}\}$ に，外力 $\{\boldsymbol{f}\}$ および物体力ベクトル $\{\boldsymbol{f_m}\}$ をセットする．また，全変位 $\{\boldsymbol{u}\}$ を零セットする．

$$\{\boldsymbol{\Delta f}\} = \{\boldsymbol{f}\} + \{\boldsymbol{f_m}\} \qquad \{\boldsymbol{u}\} = \{\boldsymbol{0}\}$$

③ 与えられた不平衡力ベクトル $\{\boldsymbol{\Delta f}\}$ に対し弾性剛性行列 $[\boldsymbol{k}]$ を用い変位増分 $\{\boldsymbol{\Delta u}\}$ を算定する．

$$\{\boldsymbol{\Delta u}\} = [\boldsymbol{k}]^{-1}\{\boldsymbol{\Delta f}\}$$

④ 算定された変位増分よりそのステップでの全変位，およびこれを用いた全ひずみを算定する．この際，既知節点変位（強制変位）があれば全変位はこれを考慮したものに修正する．

$$\{\boldsymbol{u}\} = \{\boldsymbol{u}\} + \{\boldsymbol{\Delta u}\} \qquad \{\boldsymbol{\epsilon}\} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u}\}$$

⑤ 算定された全ひずみを用いて応力を算定する．この時温度変化によるひずみを除去する．

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{D_e}]\{\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon_0}\}$$

⑥ 算定された応力（主応力：σ_1，σ_2）が材料の引張強度 σ_{ts} を超過した場合，算定された応力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ から引張成分 $\{\boldsymbol{\sigma_t}\}$ を除去する．

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\boldsymbol{\sigma}\} - \{\boldsymbol{\sigma_t}\}$$

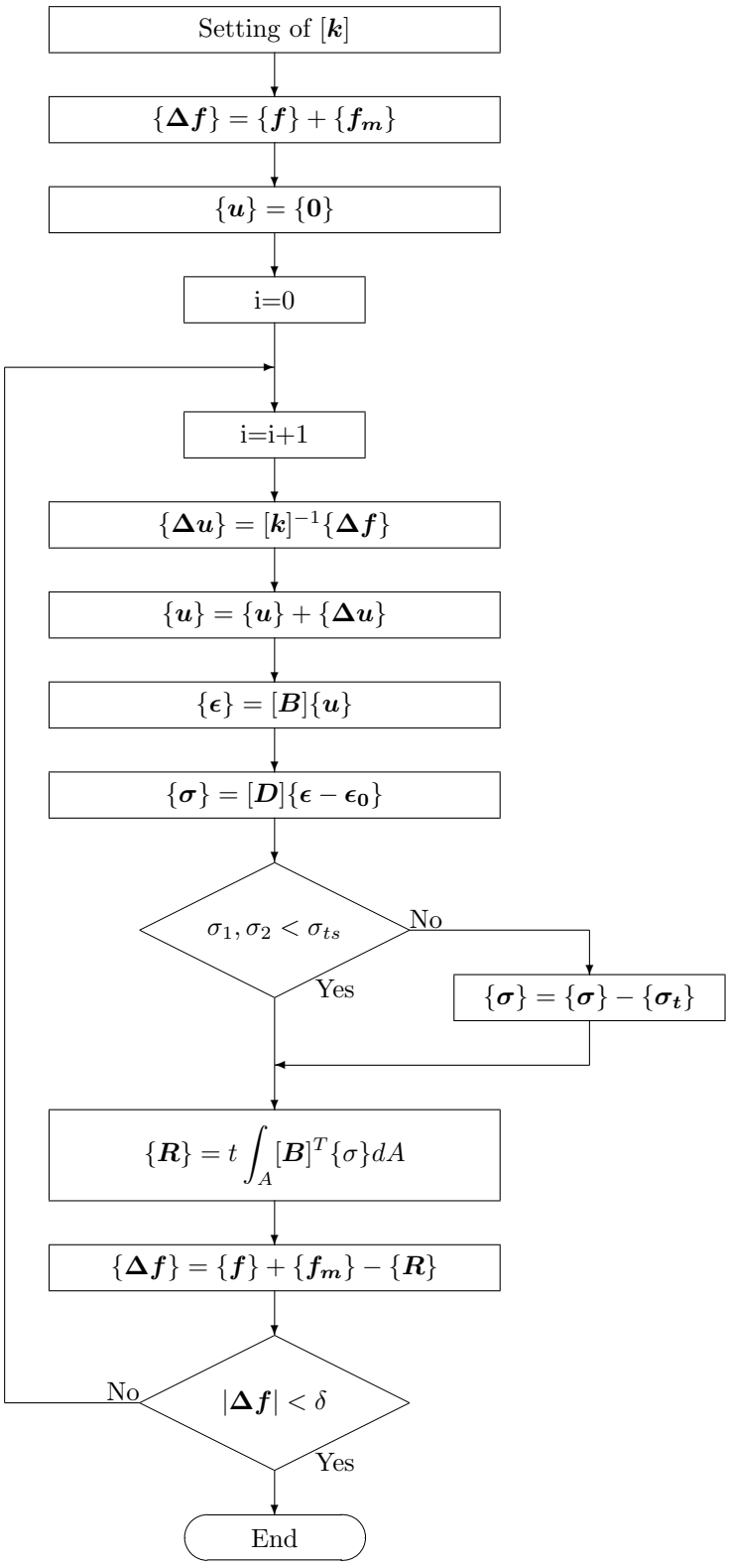
⑦ 引張成分を除去した応力から内力ベクトル $\{\boldsymbol{R}\}$ を算定する．内力ベクトルは，既知節点変位（強制変位）および温度ひずみを考慮して算定しているため，釣り合い条件を満足しなければ，自動的に不平衡力が発生する．

$$\{\boldsymbol{R}\} = t \cdot \int_A [\boldsymbol{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dA$$

⑧ 不平衡力 $\{\boldsymbol{\Delta f}\}$ に，初期の荷重（外力および物体力）と内力との差分をセットする．

$$\{\boldsymbol{\Delta f}\} = \{\boldsymbol{f}\} + \{\boldsymbol{f_m}\} - \{\boldsymbol{R}\}$$

⑨ 不平衡力 $\{\boldsymbol{\Delta f}\}$ が十分小さければ計算終了とし，そうえなければ ③ に戻り収束計算を行う．本プログラムでは，実際には不平衡力ではなく，変位増分が十分小さくなった時点で収束と判定している．


Setting of $[\boldsymbol{k}]$
$\{\boldsymbol{\Delta f}\} = \{\boldsymbol{f}\} + \{\boldsymbol{f_m}\}$
$\{\boldsymbol{u}\} = \{\boldsymbol{0}\}$
i=0
i=i+1
$\{\boldsymbol{\Delta u}\} = [\boldsymbol{k}]^{-1}\{\boldsymbol{\Delta f}\}$
$\{\boldsymbol{u}\} = \{\boldsymbol{u}\} + \{\boldsymbol{\Delta u}\}$
$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u}\}$
$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{D}]\{\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon_0}\}$
$\sigma_1, \sigma_2 < \sigma_{ts}$
No
Yes
$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\boldsymbol{\sigma}\} - \{\boldsymbol{\sigma_t}\}$
$\{\boldsymbol{R}\} = t \int_A [\boldsymbol{B}]^T \{\sigma\} dA$
$\{\boldsymbol{\Delta f}\} = \{\boldsymbol{f}\} + \{\boldsymbol{f_m}\} - \{\boldsymbol{R}\}$
No
$|\boldsymbol{\Delta f}| < \delta$
Yes
End

■収束計算手順

◯ $i-1$ 番目の不平衡点における応力を $\boldsymbol{\sigma_{i-1}}$，不平衡力を $\boldsymbol{\Delta f_{i-1} = f - R_{i-1}}$ とする．

◯ 不平衡力 $\boldsymbol{\Delta f_{i-1}}$ より変位増分 $\boldsymbol{\Delta u_i}$ を算定する．

◯ $\boldsymbol{\Delta u_i}$ より全変位 $\boldsymbol{u_i}$，全ひずみ $\boldsymbol{\epsilon_i}$ を求め，応力 $\boldsymbol{\sigma_i}$ を算定する．
温度ひずみ $\boldsymbol{\epsilon_0}$ はこの応力算定時に考慮する．

◯ i 番目の不平衡点における応力を $\boldsymbol{\sigma_i = \sigma_i - \sigma_t}$ として算定する．
ここに $\boldsymbol{\sigma_t}$ は $\boldsymbol{\sigma_i}$ の**引張成分**である．

◯ $\boldsymbol{\sigma_i}$ より内力ベクトル $\boldsymbol{R_i}$ を算定する．

◯ $\boldsymbol{\Delta f_i = f - R_i}$ として i 番目の不平衡力を算定し，繰り返し計算を行う．

◯ 繰り返し過程における剛性行列 $[\boldsymbol{K}]$ は常に一定である．

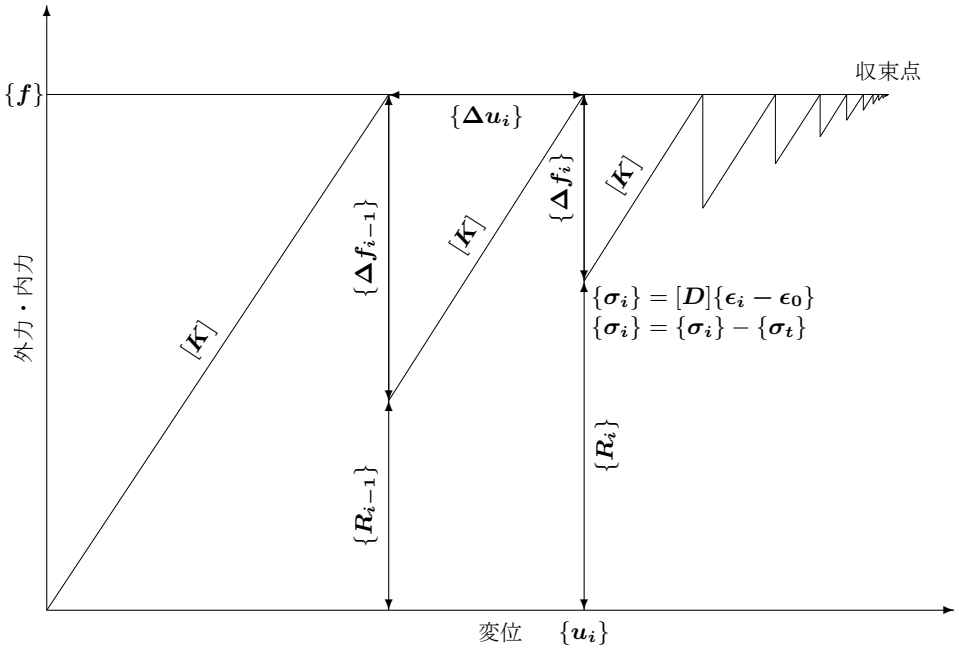


図 1　収束計算概念図

3.2 引張応力成分除去の方法

No-tension 解析では内力ベクトルを求める際，引張応力成分を除去する必要がある．この方法としては，算定した全応力 $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$ に対し主応力およびその方向を計算し，主応力が引張状態であれば，これを $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$ の成分に座標変換し，差し引くことにより引張応力成分を除去する．具体的手順を以下に示す．

(1) 主応力の計算

水平方向を x 軸，鉛直方向を y 軸とする座標において，引張を正とするある応力状態が存在するとする．この状態に対し，反時計回りに θ だけ回転させたところに主軸 (I 軸) があるとすると，主応力は以下の通り算定できる．

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4{\tau_{xy}}^2} \tag{40}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4{\tau_{xy}}^2} \tag{41}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \tag{42}$$

ここに，
$\sigma_x > \sigma_y$ かつ $\tau_{xy} \geqq 0$ なら $\theta = \theta$
$\sigma_x > \sigma_y$ かつ $\tau_{xy} < 0$ なら $\theta = \theta + 180°$
$\sigma_x < \sigma_y$ なら $\theta = \theta + 90°$
$\sigma_x = \sigma_y$ かつ $\tau_{xy} > 0$ なら $\theta = 45°$
$\sigma_x = \sigma_y$ かつ $\tau_{xy} < 0$ なら $\theta = 135°$
$\sigma_x = \sigma_y$ かつ $\tau_{xy} = 0$ なら 不定 $(\theta = 0)$

(2) 引張応力成分の除去

水平方向を x 軸，鉛直方向を y 軸とする座標において，引張を正とするある応力状態が存在するとする．この座標を反時計回りに ϕ だけ回転させた場合の応力を「$'$」をつけて表現すると以下の通りとなる．

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\phi + \tau_{xy}\sin 2\phi \tag{43}$$

$$\sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\phi - \tau_{xy}\sin 2\phi \tag{44}$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\phi + \tau_{xy}\cos 2\phi \tag{45}$$

ここで，回転前の x-y 座標系が主軸とすれば，

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\phi \tag{46}$$

$$\sigma'_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\phi \tag{47}$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\phi \tag{48}$$

となり，座標回転後における σ_1 および σ_2 の成分は以下の通りとなる．

$$\sigma_1 \text{ の成分} \begin{cases} \sigma'_x = \dfrac{\sigma_1}{2}(1 + \cos 2\phi) \\ \sigma'_y = \dfrac{\sigma_1}{2}(1 - \cos 2\phi) \\ \tau'_{xy} = -\dfrac{\sigma_1}{2}\sin 2\phi \end{cases} \tag{49}$$

$$\sigma_2 \text{ の成分} \begin{cases} \sigma'_x = \dfrac{\sigma_2}{2}(1 - \cos 2\phi) \\ \sigma'_y = \dfrac{\sigma_2}{2}(1 + \cos 2\phi) \\ \tau'_{xy} = \dfrac{\sigma_2}{2}\sin 2\phi \end{cases} \tag{50}$$

No-tension 解析を行う場合，計算された応力 $\{\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}\}$ から引張成分を除去する必要がある．このため，$\sigma_1 > 0$(引張) の場合，σ_1 による引張成分の除去は以下の通り行う．

$$\sigma_1 \text{ による引張成分の除去} \begin{cases} \sigma_x^{c1} = \sigma_x - \dfrac{\sigma_1}{2}(1+\cos 2\phi) \\ \sigma_y^{c1} = \sigma_y - \dfrac{\sigma_1}{2}(1-\cos 2\phi) \\ \tau_{xy}^{c1} = \tau_{xy} + \dfrac{\sigma_1}{2}\sin 2\phi \end{cases} \tag{51}$$

さらに，σ_2 が引張の場合，

$$\sigma_2 \text{ による引張成分の除去} \begin{cases} \sigma_x^{c2} = \sigma_x^{c1} - \dfrac{\sigma_2}{2}(1-\cos 2\phi) \\ \sigma_y^{c2} = \sigma_x^{c1} - \dfrac{\sigma_2}{2}(1+\cos 2\phi) \\ \tau_{xy}^{c2} = \tau_{xy}^{c1} - \dfrac{\sigma_2}{2}\sin 2\phi \end{cases} \tag{52}$$

ここで $\boldsymbol{\phi = -\theta}$ である．また，σ_1 を最大主応力としているため，計算された応力から差し引く順序は σ_1 の成分からとしている．

不平衡力を求めるための内力ベクトル $\{\boldsymbol{R}\}$ は，ここで計算した $\{\sigma_x^{c1},\sigma_y^{c1},\tau_{xy}^{c1}\}^T$ あるいは $\{\sigma_x^{c2},\sigma_y^{c2},\tau_{xy}^{c2}\}^T$ を用いて計算する．

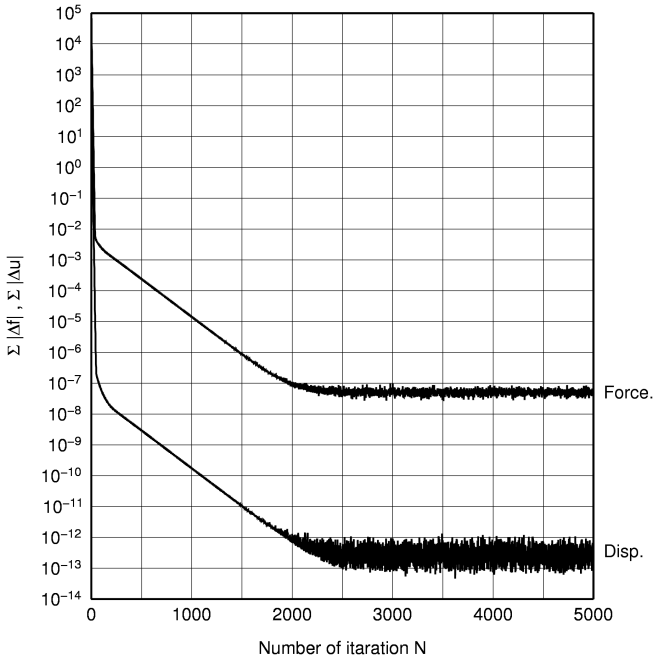
3.3　収束の考え方

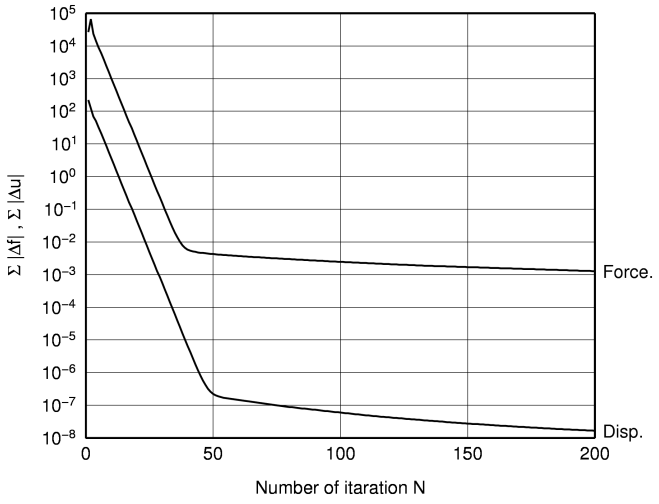
下図は，後述する埋設式水圧鉄管モデルにおいて充填コンクリートを No-tension 材料とした場合の，収束計算過程における残差不平衡力絶対値の総和および変位増分絶対値の総和を示したものである．図より，繰り返し回数 40~50 回程度までで，残差不平衡力および変位増分は急速に減少し，以降 2000 回程度まで緩やかい減少，以降は減少傾向はなくなることがわかる．

収束判定基準は，変位と応力の双方で行うことが好ましいとの考えもあるが，本プログラムでは単純化を図るため，変位増分が十分小さくなった場合に収束と判定することとした．具体的には，例題の場合で繰り返し回数が 100 回程度以内で収束する程度としている．

$$\text{収束判定条件} \qquad \left| \frac{(\Delta u_i)_n}{\sum\{(\Delta u_i)_n\}} \right| < 1 \times 10^{-6}$$

ここに，Δu_i は変位増分，$\sum\{\Delta u_i\}$ は収束計算過程での全累計変位（その時点での変位の解）であり，i は自由度，n は繰り返し回数のインクリメントである．



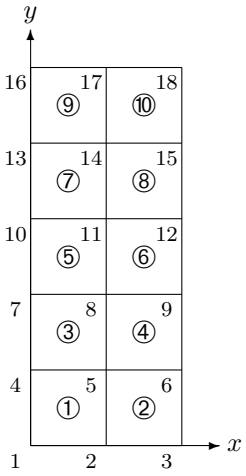


4. モデル解析

4.1 単純モデルによる機能確認

コンクリート壁を模擬した幅 2m，高さ 5m，厚さ 0.5m の壁をモデルに弾性解析の機能確認テストを行った．要素分割および節点番号は以下に示すとおりであり，節点数 18，要素数 10 のモデルである．

なお，本節で紹介する事例では，応力値の出力は要素平均としている．



材料	コンクリート壁
幅×高×厚	2.0 (m)×5.0 (m)×0.5 (m)
弾性係数	2000000 (t/m^2)
ポアソン比	0.2
単位体積重量	2.3 (t/m^3)
線膨張係数	10×10^{-6}(/°C)

(1)　上端より圧縮力を受ける場合（Case-0）

下端を支持され，上端より総計 400 t の等分布圧縮力を受ける場合を考える．節点荷重入力値は，等価節点力の考え方により各節点に配分する．

入力データ

x 方向拘束節点番号	2
y 方向拘束節点番号	1，2，3
載荷点数	3
載荷節点番号および荷重	16（− 100 t），17（− 200 t），18（− 100 t）
温度変化	無し

4nod-0
*displacement

node	x-coord.	y-coord	x-dis	y-dis
1	0.00E+00	0.00E+00	-4.00E-05	0.00E+00
2	1.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
3	2.00E+00	0.00E+00	4.00E-05	0.00E+00
4	0.00E+00	1.00E+00	-4.00E-05	-2.00E-04
5	1.00E+00	1.00E+00	5.86E-19	-2.00E-04
6	2.00E+00	1.00E+00	4.00E-05	-2.00E-04
7	0.00E+00	2.00E+00	-4.00E-05	-4.00E-04
8	1.00E+00	2.00E+00	1.78E-18	-4.00E-04
9	2.00E+00	2.00E+00	4.00E-05	-4.00E-04
10	0.00E+00	3.00E+00	-4.00E-05	-6.00E-04
11	1.00E+00	3.00E+00	3.65E-18	-6.00E-04
12	2.00E+00	3.00E+00	4.00E-05	-6.00E-04
13	0.00E+00	4.00E+00	-4.00E-05	-8.00E-04
14	1.00E+00	4.00E+00	6.08E-18	-8.00E-04
15	2.00E+00	4.00E+00	4.00E-05	-8.00E-04
16	0.00E+00	5.00E+00	-4.00E-05	-1.00E-03
17	1.00E+00	5.00E+00	8.67E-18	-1.00E-03
18	2.00E+00	5.00E+00	4.00E-05	-1.00E-03

*stress

element	sig-x	sig-y	tau-xy	ps1	ps2	ang
1	-2.93E-14	-4.00E+02	1.12E-13	-5.68E-14	-4.00E+02	1.60E-14
2	6.84E-14	-4.00E+02	9.24E-14	5.68E-14	-4.00E+02	1.32E-14
3	5.86E-14	-4.00E+02	1.07E-14	5.68E-14	-4.00E+02	1.53E-15
4	2.84E-14	-4.00E+02	1.03E-13	5.68E-14	-4.00E+02	1.48E-14
5	7.64E-14	-4.00E+02	-1.28E-13	5.68E-14	-4.00E+02	1.80E+02
6	4.62E-14	-4.00E+02	2.34E-13	5.68E-14	-4.00E+02	3.36E-14
7	7.11E-14	-4.00E+02	-1.49E-13	5.68E-14	-4.00E+02	1.80E+02
8	2.84E-14	-4.00E+02	2.84E-13	5.68E-14	-4.00E+02	4.07E-14
9	1.71E-13	-4.00E+02	-1.07E-13	1.71E-13	-4.00E+02	1.80E+02
10	4.26E-14	-4.00E+02	1.14E-13	5.68E-14	-4.00E+02	1.63E-14

■応力

理論値 $400\mathrm{t/m^2}$ に対し解析値は全要素で σ_y =$400\mathrm{t/m^2}$（ok）

■変位

上端（載荷部）での理論値 $v = \frac{\sigma_y}{E} \times \ell = 1mm$ に対し上端節点（16,17,18）で 1mm（ok）

(2) 自由膨張する場合（Case-1）

下端を支持され，外力は無い状態で，要素全体に温度上昇を与えた場合を考える．

入力データ

x 方向拘束節点番号	2
y 方向拘束節点番号	1，2，3
載荷点数	0
載荷節点番号および荷重	無し
温度変化	＋ 10°C（全要素：温度上昇）

4nod-1
*displacement

node	x-coord.	y-coord	x-dis	y-dis
1	0.00E+00	0.00E+00	-1.00E-04	0.00E+00
2	1.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
3	2.00E+00	0.00E+00	1.00E-04	0.00E+00
4	0.00E+00	1.00E+00	-1.00E-04	1.00E-04
5	1.00E+00	1.00E+00	-1.73E-19	1.00E-04
6	2.00E+00	1.00E+00	1.00E-04	1.00E-04
7	0.00E+00	2.00E+00	-1.00E-04	2.00E-04
8	1.00E+00	2.00E+00	-4.24E-19	2.00E-04
9	2.00E+00	2.00E+00	1.00E-04	2.00E-04
10	0.00E+00	3.00E+00	-1.00E-04	3.00E-04
11	1.00E+00	3.00E+00	-9.27E-19	3.00E-04
12	2.00E+00	3.00E+00	1.00E-04	3.00E-04
13	0.00E+00	4.00E+00	-1.00E-04	4.00E-04
14	1.00E+00	4.00E+00	-1.61E-18	4.00E-04
15	2.00E+00	4.00E+00	1.00E-04	4.00E-04
16	0.00E+00	5.00E+00	-1.00E-04	5.00E-04
17	1.00E+00	5.00E+00	-2.48E-18	5.00E-04
18	2.00E+00	5.00E+00	1.00E-04	5.00E-04

*stress

element	sig-x	sig-y	tau-xy	ps1	ps2	ang
1	-7.11E-15	3.84E-13	-5.33E-14	3.91E-13	-1.42E-14	9.76E+01
2	-7.11E-15	7.74E-13	-5.06E-14	7.78E-13	-1.04E-14	9.37E+01
3	-2.13E-14	4.19E-13	1.07E-14	4.19E-13	-2.16E-14	8.86E+01
4	-5.68E-14	7.03E-13	-2.49E-14	7.04E-13	-5.77E-14	9.19E+01
5	1.42E-14	4.12E-13	0.00E+00	4.12E-13	1.42E-14	9.00E+01
6	-3.55E-14	7.96E-13	-9.41E-14	8.06E-13	-4.61E-14	9.64E+01
7	-7.11E-15	1.99E-13	4.26E-14	2.07E-13	-1.56E-14	7.88E+01
8	-1.42E-14	6.04E-13	-1.07E-13	6.22E-13	-3.21E-14	9.95E+01
9	-1.56E-13	-7.11E-15	-1.78E-14	-5.02E-15	-1.58E-13	9.67E+01
10	-3.55E-14	3.06E-13	-4.97E-14	3.13E-13	-4.26E-14	9.81E+01

■応力

理論値 $0\mathrm{t/m^2}$ に対し解析値は全要素で 10^{-12} オーダー以下（ok）

■変位

上端（載荷部）での理論値 $v = \alpha\Delta T \times \ell = 0.5mm$ 膨張に対し上端節点（16,17,18）で 0.5mm 膨張（ok）

(3) 体積変化を拘束した場合（Case-2）

上・下端において上下方向の変形を拘束した状態で，要素全体に温度上昇を与えた場合を考える．

入力データ

x 方向拘束節点番号	2，17
y 方向拘束節点番号	1，2，3，16，17，18
載荷点数	0
載荷節点番号および荷重	無し
温度変化	＋ 10°C（全要素：温度上昇）

4nod-2
*displacement

node	x-coord.	y-coord	x-dis	y-dis
1	0.00E+00	0.00E+00	-1.20E-04	0.00E+00
2	1.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
3	2.00E+00	0.00E+00	1.20E-04	0.00E+00
4	0.00E+00	1.00E+00	-1.20E-04	2.62E-20
5	1.00E+00	1.00E+00	2.36E-20	-2.97E-21
6	2.00E+00	1.00E+00	1.20E-04	-4.19E-20
7	0.00E+00	2.00E+00	-1.20E-04	2.16E-20
8	1.00E+00	2.00E+00	8.66E-20	-1.18E-21
9	2.00E+00	2.00E+00	1.20E-04	-5.16E-20
10	0.00E+00	3.00E+00	-1.20E-04	-1.88E-21
11	1.00E+00	3.00E+00	9.69E-20	-1.58E-21
12	2.00E+00	3.00E+00	1.20E-04	-2.64E-20
13	0.00E+00	4.00E+00	-1.20E-04	-1.60E-20
14	1.00E+00	4.00E+00	7.45E-20	-2.84E-21
15	2.00E+00	4.00E+00	1.20E-04	-1.02E-20
16	0.00E+00	5.00E+00	-1.20E-04	0.00E+00
17	1.00E+00	5.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
18	2.00E+00	5.00E+00	1.20E-04	0.00E+00

*stress

element	sig-x	sig-y	tau-xy	ps1	ps2	ang
1	-2.84E-14	-2.00E+02	5.97E-15	-2.84E-14	-2.00E+02	1.71E-15
2	0.00E+00	-2.00E+02	-1.97E-14	0.00E+00	-2.00E+02	1.80E+02
3	-6.39E-14	-2.00E+02	4.52E-14	-5.68E-14	-2.00E+02	1.29E-14
4	-2.84E-14	-2.00E+02	2.04E-14	-2.84E-14	-2.00E+02	5.85E-15
5	-1.42E-14	-2.00E+02	-2.14E-14	0.00E+00	-2.00E+02	1.80E+02
6	-2.13E-14	-2.00E+02	-3.30E-14	-2.84E-14	-2.00E+02	1.80E+02
7	0.00E+00	-2.00E+02	-1.33E-15	0.00E+00	-2.00E+02	1.80E+02
8	-2.84E-14	-2.00E+02	-4.22E-14	-2.84E-14	-2.00E+02	1.80E+02
9	-8.53E-14	-2.00E+02	-3.46E-14	-8.53E-14	-2.00E+02	1.80E+02
10	7.11E-15	-2.00E+02	-4.80E-14	0.00E+00	-2.00E+02	1.80E+02

■応力

理論値 $\sigma_y = E \cdot \alpha \Delta T$ =200t/m^2 に対し解析値は全要素で σ_y =200t/m^2（ok）

■変位

全要素での鉛直変位理論値 0 に対し全要素で鉛直変位 10^{-20} オーダー以下（ok）

(4) 自重解析（Case-3）

下端を支持され，全要素に重力のみが作用する場合を考える．

入力データ

x 方向拘束節点番号	2
y 方向拘束節点番号	1，2，3
載荷点数	0
載荷節点番号および荷重	無し
温度変化	無し
上下方向慣性力	− 1（数値は重力加速度に対する加速度比率．下向きのため− 1 とする）

4nod-3
*displacement

node	x-coord.	y-coord	x-dis	y-dis
1	0.00E+00	0.00E+00	-1.06E-06	0.00E+00
2	1.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
3	2.00E+00	0.00E+00	1.06E-06	0.00E+00
4	0.00E+00	1.00E+00	-9.35E-07	-5.12E-06
5	1.00E+00	1.00E+00	8.97E-21	-5.21E-06
6	2.00E+00	1.00E+00	9.35E-07	-5.12E-06
7	0.00E+00	2.00E+00	-6.93E-07	-9.14E-06
8	1.00E+00	2.00E+00	2.84E-20	-9.25E-06
9	2.00E+00	2.00E+00	6.93E-07	-9.14E-06
10	0.00E+00	3.00E+00	-4.58E-07	-1.20E-05
11	1.00E+00	3.00E+00	5.77E-20	-1.21E-05
12	2.00E+00	3.00E+00	4.58E-07	-1.20E-05
13	0.00E+00	4.00E+00	-2.24E-07	-1.37E-05
14	1.00E+00	4.00E+00	9.74E-20	-1.38E-05
15	2.00E+00	4.00E+00	2.24E-07	-1.37E-05
16	0.00E+00	5.00E+00	-7.12E-08	-1.43E-05
17	1.00E+00	5.00E+00	1.41E-19	-1.44E-05
18	2.00E+00	5.00E+00	7.12E-08	-1.43E-05

*stress

element	sig-x	sig-y	tau-xy	ps1	ps2	ang
1	-7.52E-02	-1.04E+01	1.47E-02	-7.52E-02	-1.04E+01	8.19E-02
2	-7.52E-02	-1.04E+01	-1.47E-02	-7.52E-02	-1.04E+01	1.80E+02
3	1.78E-02	-8.05E+00	1.47E-02	1.78E-02	-8.05E+00	1.04E-01
4	1.78E-02	-8.05E+00	-1.47E-02	1.78E-02	-8.05E+00	1.80E+02
5	3.86E-04	-5.75E+00	1.74E-04	3.86E-04	-5.75E+00	1.73E-03
6	3.86E-04	-5.75E+00	-1.74E-04	3.86E-04	-5.75E+00	1.80E+02
7	-8.23E-03	-3.45E+00	8.59E-03	-8.20E-03	-3.45E+00	1.43E-01
8	-8.23E-03	-3.45E+00	-8.59E-03	-8.20E-03	-3.45E+00	1.80E+02
9	6.52E-02	-1.15E+00	-9.09E-03	6.53E-02	-1.15E+00	1.80E+02
10	6.52E-02	-1.15E+00	9.09E-03	6.53E-02	-1.15E+00	4.29E-01

■応力

理論値は要素中心に対しその上載重量相当応力 σ_y が発生（ok）

要素番号		10,9	8,7	6,5	4,3	2,1
要素中心上載高さ	(m)	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5
要素中心上載重量	(t/m^2)	1.15	3.45	5.75	8.05	10.35
解析発生応力	$\sigma_y(t/m^2)$	1.15	3.45	5.75	8.05	10.35

4.2　片持梁の曲げ応力

先端に 50t の集中荷重を受ける長さ 10m，高さ 2m，厚さ 1m の片持梁の発生応力の比較を行った．解析モデルの弾性係数は 2.0E+6 (t/m^2)，ポアソン比は 0.2 とした．

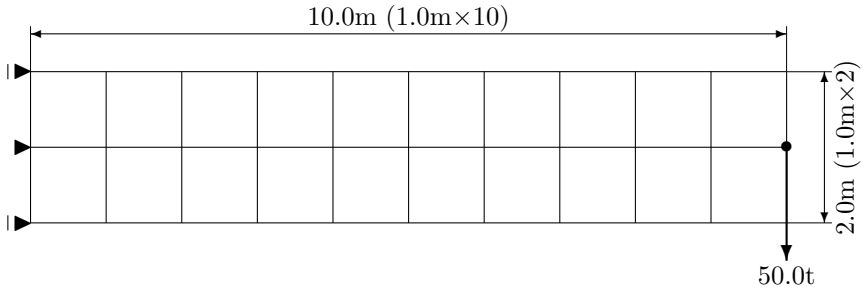


図 2　先端に集中荷重を受ける片持梁モデル（20 要素：板厚 1.0m）

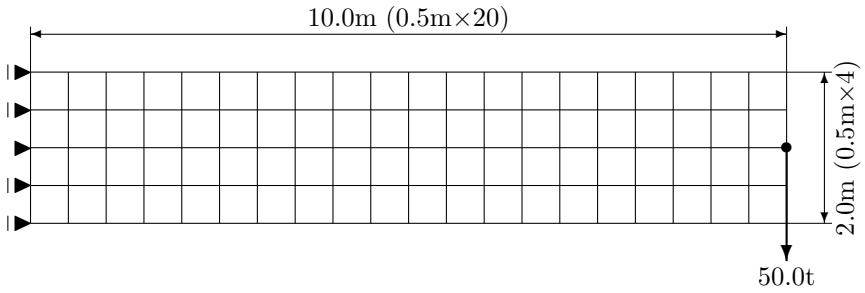


図 3　先端に集中荷重を受ける片持梁モデル（80 要素：板厚 1.0m）

下図に梁理論と FEM20 要素モデル，FEM80 要素モデルによる発生応力の比較を示す．なお，プロットした数値は梁理論では引張側縁応力とし，FEM モデルでは要素中心での σ_x（水平方向応力）より外挿にて引張側縁応力を求めた（縦方向で似た場合各要素の σ_x の線形性は確保されていることは確認済み）．

20 要素モデルでは梁理論の 90% 程度，80 要素モデルでは梁理論の 97% 程度の応力値となっている．

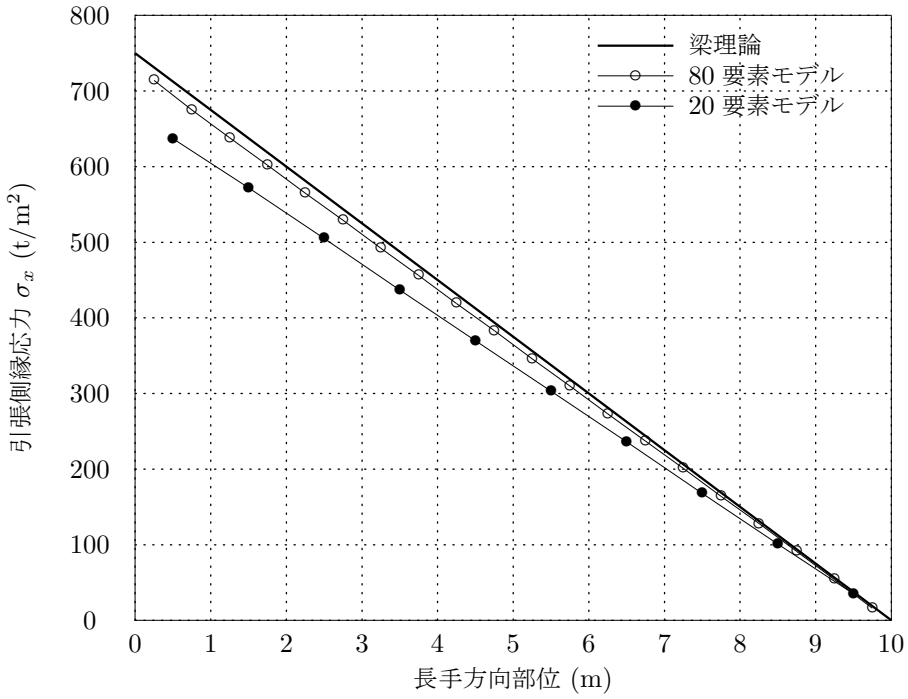


図 4　梁理論・FEM20 要素モデル・FEM80 要素モデルの引張縁応力の比較

4.3　多重円環理論と No-tension 解析結果の比較

埋設式水圧鉄管をモデルとして，Otto・Frey-Baer の方法として知られる多重円環理論（外部境界は無限遠）と FEM での鉄管応力および鉄管半径方向変位の比較を行った．いずれの解析においても応力状態は平面ひずみ状態とし，温度変化量は 0 とした．

FEM においては，鉄管を中心とする円形領域の 1/4 のモデル，平面ひずみ状態とした．総節点数 176，総要素数 150 である．計算は繰り返し回数 20 回程度以内で収束しており，計算時間は 1 ケース当たり入出力を除き 0.2 秒程度（CPU：Core2Duo 2.26GHz，デバックモード）である．

入力物性値

項目	入力値	備考
応力状態	平面ひずみ	
鉄管板厚	40 mm	鉄管は板厚方向に 2 分割でモデル化
鉄管内半径	2300 mm	
掘削半径	3300 mm	
作用内水圧	10 MPa	
鉄管弾性係数	206000 MPa	
鉄管ポアソン比	0.3	
鉄管引張り強さ	950 MPa	
コンクリート弾性係数	20600 MPa	コンクリート（下図着色部）は
コンクリートポアソン比	0.2	No-tension 材料の場合と完全弾性体
コンクリート引張り強さ	0	の場合の 2 ケースを比較
岩盤弾性係数	0.1～100000 MPa	
岩盤ポアソン比	0.25	
岩盤引張り強さ	10 MPa	強めの物性を入力
温度変化	無し	

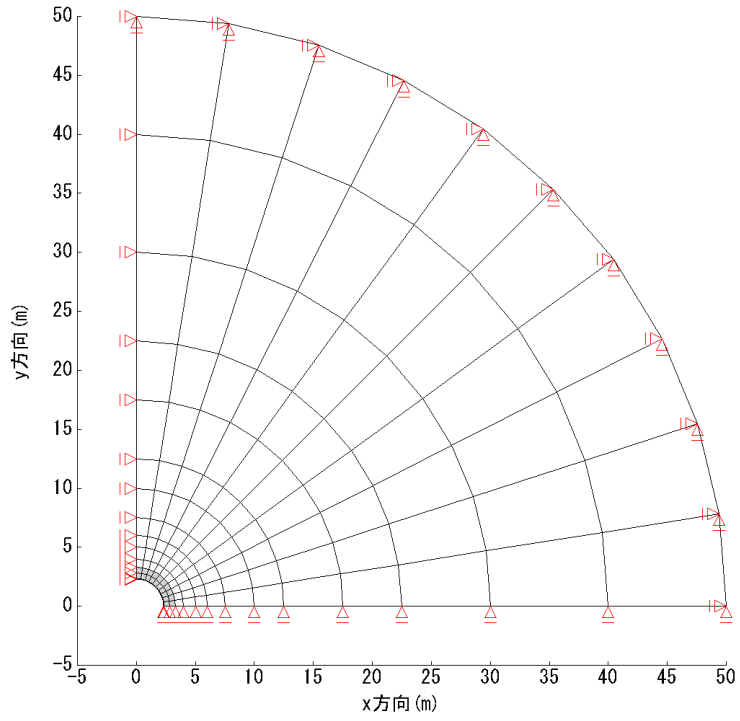


図 5　FEM 解析要素分割図

鉄管応力・鉄管半径方向変位の比較結果は下図のとおりである．解析結果は，充填コンクリートを No-tension 材料とした場合と，完全弾性体とした場合で比較している．

鉄管応力は，FEM 解析結果が高めの値を与えるが，多重円環理論解との一致度は高い．

鉄管半径方向変位は，FEM 解析結果が小さい値となる傾向にあり，岩盤弾性係数が小さくなり変位が大きくなると差異がでるが，その差は 0.5mm 程度以内である．

応力算定を行う上での FEM モデルは，今回程度の要素分割でも実用上問題ない精度と考えられる．

岩盤	鉄管応力 (Mpa)				鉄管半径方向変位 (mm)			
弾性係数	No-tension(Con)		完全弾性体		No-tension(Con)		完全弾性体	
(Mpa)	円環理論	FEM	円環理論	FEM	円環理論	FEM	円環理論	FEM
0.1	575	577	198	213	6.42	5.93	2.21	2.22
1	575	577	198	213	6.42	5.93	2.21	2.22
10	574	576	198	213	6.41	5.92	2.21	2.21
100	562	566	197	212	6.28	5.82	2.20	2.20
200	550	556	196	210	6.15	5.71	2.18	2.19
500	518	527	192	207	5.78	5.41	2.15	2.15
1000	471	485	187	201	5.26	4.98	2.09	2.09
2000	401	419	178	190	4.48	4.31	1.99	1.99
5000	281	301	156	165	3.14	3.11	1.74	1.73
10000	194	210	131	137	2.17	2.18	1.46	1.44
20000	128	138	102	106	1.43	1.45	1.14	1.12
50000	76	79	70	70	0.85	0.84	0.78	0.76
100000	56	55	53	52	0.62	0.61	0.60	0.58

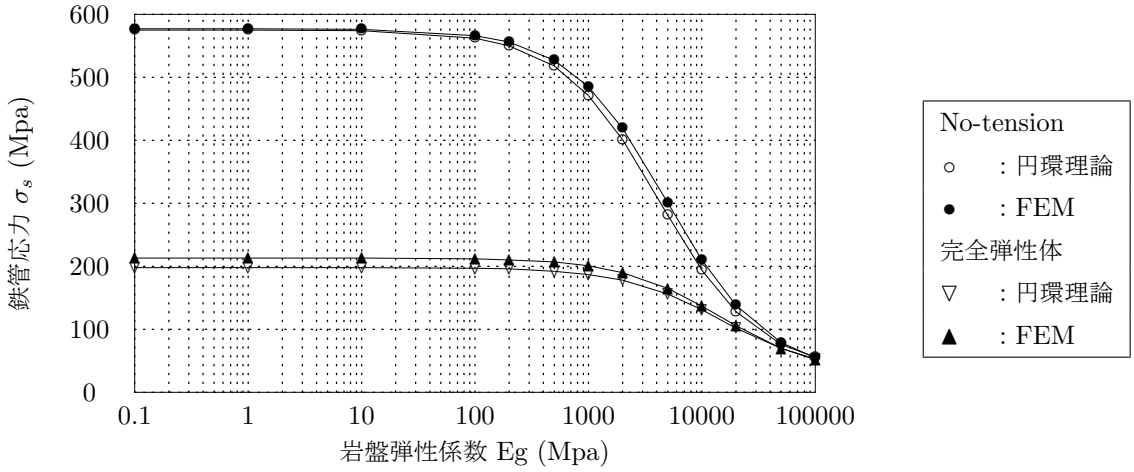


図 6　多重円環理論と FEM による鉄管応力の比較

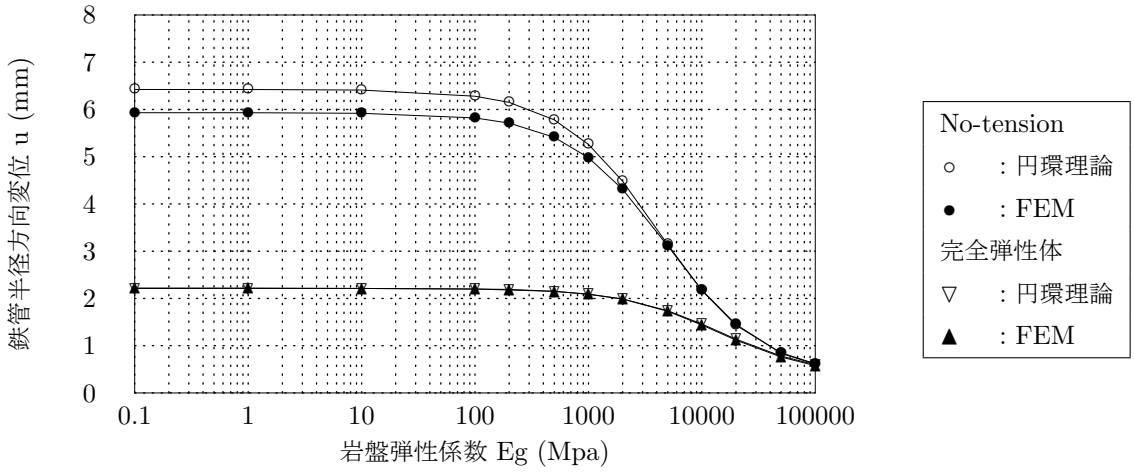


図 7　多重円環理論と FEM による鉄管半径方向変位の比較

5. プログラミング

5.1 プログラムの特徴

◯ No-tension 材料，温度変化，慣性力（水平・鉛直）を扱える 2 次元応力解析プログラムである．
◯ 要素は 1 節点 2 自由度の 4 節点パラメトリック要素とし，Gauss 積分点は 4 点としている．
◯ 座標系は x 方向が向かって右向き，y 方向が上向きである．
◯ 連立方程式はコレスキー法にて解いている．収束計算を行うが剛性行列は変化させないため，コレスキー法においては三角行列作成部は 1 回のみ実行，前進消去・後退代入部は不平衡力の変化に伴い繰り返し回数分実行し計算時間短縮を図っている．
◯ No-tension 解析における収束判定条件は，変位増分および不平衡力の前回の繰り返し計算時との比が 99% 以上となったことによる．なお繰り返し回数の上限は 2000 回としている．
◯ 十分に大きな材料の引張強さを入力すれば通常の弾性解が得られる．
◯ 開発言語は Microsoft Visual Basic 2008 Express Edition である．

5.2 データ入力書式（csv 形式）

入力項目	備考
コメント	コメント記載行
NSTRES,NODT,NELT,MATEL,KOX,KOY,NF	応力状態・節点数・要素数等
t,Em,po,gamma,gkh,gkv,alpha,ts ・・・材料種別数分 (MATEL 行) 繰り返し入力・・・	材料特性
node-1,node-2,node-3,node-4,matno ・・・要素数分 (NELT 行) 繰り返し入力・・・	要素を囲む節点番号，材料種別番号 (4 節点対応：節点番号は反時計回りで入力)
x,y,deltaT ・・・節点数分 (NODT 行) 繰り返し入力・・・	節点座標，節点温度変化量 (x：右方向，y：上方向)
nokx ・・・x 方向拘束節点数分 (KOX 行) 繰り返し入力・・・	x 方向拘束節点番号 KOX=0 なら省略
noky ・・・y 方向拘束節点数分 (KOY 行) 繰り返し入力・・・	y 方向拘束節点番号 KOY=0 なら省略
node,fx,fy ・・・載荷節点分 (NF 行) 繰り返し入力・・・	載荷節点番号，x 方向荷重，y 方向荷重 NF=0 なら省略

NSTRES	：応力状態 （平面ひずみ：0，平面応力：1）	t	：要素板厚
		Em	：要素弾性係数
NODT	：総節点数	po	：要素ポアソン比
NELT	：総要素数	gamma	：要素単位体積重量
MATEL	：材料種別数	gkh	：要素 x 方向慣性力 (重力加速度比)
KOX	：x 方向拘束節点数	gkv	：要素 y 方向慣性力 (重力加速度比)
KOY	：y 方向拘束節点数	alpha	：線膨張係数
NF	：載荷節点数	ts	：要素引張強さ
matno	：材料種別番号	deltaT	：節点温度変化量

■注意事項

◯ 慣性力は重力加速度に対する比で定義しており，自重を考慮する場合は（gkv=-1.0）として入力する．
◯ 温度変化量は，各節点の温度変化量として節点座標と同時に入力する．
◯ 材料の引張強さが十分大きく No-tension 状態が発生しないことが保証される場合は，温度変化量は上昇・下降ともに特に制限無く入力して良い．
◯ No-tension 状態が発生する場合は，温度変化による応力が全て圧縮となるよう温度上昇のみを与える条件とする．これは温度変化による応力状態が釣合い状態であることを保証するための措置である．

5.3 出力ファイル書式（csv 形式）

出力内容
コメント
NODT,NELT,MATEL,KOX,KOY,NF 節点数, 要素数, 材料種別数,x 方向拘束節点数,y 方向拘束節点数, 載荷節点数の数値
*input-data node,x,y,fx,fy,x-fix,y-fix,deltaT node：節点番号 x,y：x 座標,y 座標 fx,fy：x 方向節点外力,y 方向節点外力 x-fix：x 方向変位拘束の有無（1：変位拘束，0：拘束無し） y-fix：y 方向変位拘束の有無（1：変位拘束，0：拘束無し） deltaT：節点温度変化量 ・・・節点数分繰り返し出力・・・
element,node-1,node-2,node-3,node-4,E,po,t,gamma,kh,kv,alpha,ts,matno element：要素番号 node-1,node-2,node-3,node-4：要素-節点番号関係 E：要素弾性係数 po：要素ポアソン比 t：要素板厚 gamma：要素単位体積重量 kh,kv：要素水平方向・鉛直方向慣性力（重力加速度との比） alpha：要素線膨張係数 ts：要素引張強さ matno：材料種別番号 ・・・要素数分繰り返し出力・・・
n step*force（n は収束までの繰り返し回数：弾性計算は n=1） node,fint-x,fint-y,fx,fy,fmass-x,fmass-y,ftempa-x,ftempa-y node：節点番号 fint-x,fint-y：x 方向・y 方向の内力ベクトル fx,fy：x 方向・y 方向の節点外力 fmass-x,fmass-y：x 方向・y 方向の物体力 ftempa-x,ftempa-y：x 方向・y 方向の温度ひずみ相当荷重 ・・・節点数分繰り返し
n step*displacement（n は収束までの繰り返し回数：弾性計算は n=1） node,x-cood,y-cood,x-dis,y-dis node：節点番号 x-cood,y-cood：節点の x 方向座標・y 方向座標 x-dis,y-dis：節点の x 方向変位・y 方向変位 ・・・節点数分繰り返し
n step*stress（n は収束までの繰り返し回数：弾性計算は n=1） element,kk,sig-x,sig-y,tau-xy,ps1,ps2,ang,noten,matno element：要素番号 kk：要素積分点番号（1〜4） sig-x,sig-y,tau-xy：x 方向直応力・y 方向直応力・せん断応力 ps1,ps2,ang：第一主応力・第二主応力・主方向（角度） noten：No-tension 区分（0：弾性，1：第一主応力 No-tension，2：第一・第二主応力 No-tension） matno：材料種別番号 ・・・積分点数分繰り返し
Calculation Time=xx sec（計算時間）

注）内力ベクトル fint は計算された応力から算定した節点力
　　拘束節点反力は内力ベクトル値より評価する．

5.4　収束判定と収束状況記録ファイル

本プログラムでの No-tension 解析における収束判定は，変位増分および残差不平衡力の絶対値の総和において，繰り返しにおける前回の値に対する変化量が 1% 未満となったことによる．

本プログラムでは，指定した出力ファイルに加え，No-tension 解析時の収束状況を記録するファイルも出力するようにしている．ファイル名は固定で「itinfo.csv」であり，出力ファイルと同一のフォルダ内に作成される．

「itinfo.csv」の中身は, 以下の通り．

i	: 繰り返し回数
dtest	: 変位増分絶対値の総和（拘束節点処理後）
ftest	: 不平衡力絶対値の総和（拘束接点処理後）

5.5 Sub プロシージャー覧

(1) MAIN

全体制御・解析結果出力を行う．主応力が材料の引張強さより小さければ弾性計算となり収束過程は 1 回のみ通過となる．

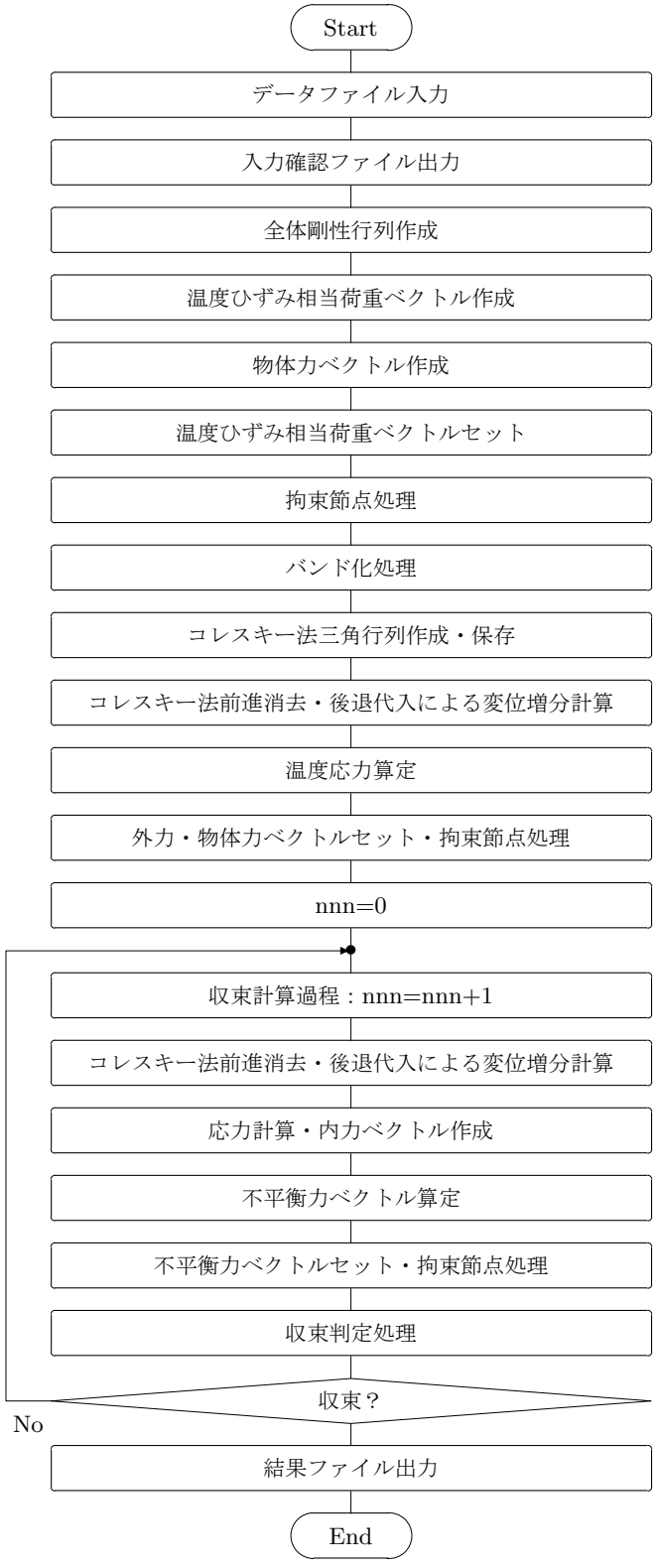


図 8　全体フロー

■拘束節点処理

節点荷重ベクトルを {f}，節点変位ベクトルを {u} とする以下の剛性方程式を考える．節点変位 u_i および u_j が既知であったとすれば，対応する節点荷重ベクトル f_i および f_j は未知数となる．また既知の節点変位以外の変位は未知数であり，またこれに対応する節点荷重ベクトルは既知数である．このため節点変位既知部分の列を記憶し，既知の u_i および u_j を乗じて移項し，網掛け部分を除いて縮小した連立一次方程式を解くことにより，未知節点変位を求めることができる．本プログラムでは，変位既知とは変位拘束されている状態であり，$u_i = 0$，$u_j = 0$ であるため，方程式の縮小のみの処理となる．

元の剛性方程式

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{i1} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{j1} & \cdots & k_{ji} & \cdots & k_{jj} & \cdots & k_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{ni} & \cdots & k_{nj} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

既知節点変位の処理

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{i1} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{j1} & \cdots & k_{ji} & \cdots & k_{jj} & \cdots & k_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{ni} & \cdots & k_{nj} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} - u_i \begin{Bmatrix} k_{1i} \\ \vdots \\ k_{ii} \\ \vdots \\ k_{ji} \\ \vdots \\ k_{ni} \end{Bmatrix} - u_j \begin{Bmatrix} k_{1j} \\ \vdots \\ k_{ij} \\ \vdots \\ k_{jj} \\ \vdots \\ k_{nj} \end{Bmatrix}$$

拘束節点処理後の縮小された剛性方程式

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1k} & \cdots & k_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{k1} & \cdots & k_{kk} & \cdots & k_{km} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{m1} & \cdots & k_{mk} & \cdots & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ f_m \end{Bmatrix}$$

上記連立一次方程式を解くことにより全節点変位が定まる．

この時点での未知数は変位拘束節点に対応する節点力となるが，これは既知節点変位より算定した要素応力より内力ベクトルを算定し，節点力に変換することにより得ることができる．

(2) INPDAT

出力ファイルへの入力データ確認出力

(3) OUTRESUL

出力ファイルへの計算結果出力

(4) DMAT

応力-ひずみ関係行列 $[d]$ の作成

(5) BMAT

Jacobi 行列の行列式 $(detJ)$，ひずみ-変位関係式 $[bm]$ の作成

(6) IPOINT

平面積分における Gauss 積分点の座標指定

(7) PLANESM

DMAT を呼び出した上で，IPOINT および BMAT を呼び出しながら面積分を行い，要素剛性行列 $[sm]$ を作成する．

$$[sm] = \sum_{kk=1}^{4} [bm]^T * [d] * [bm] * (t) * (detJ)$$

ここで作成した要素剛性行列 $[sm]$ を，メインルーチンにおいて ASMAT を呼び出し全体剛性行列 $[tsm]$ に組み込む．

(8) TEMPAVEC

節点温度変化量より温度ひずみ相当応力 $\{\sigma_0\} = [d]\{\epsilon_0\}$ と温度ひずみ相当ベクトルを作成する．

$$\{fevec\} = \sum_{kk=1}^{4} [bm]^T * [d] * \{\epsilon_0\} * (t) * (detJ)$$

ここで作成した要素荷重ベクトル $\{fevec\}$ を，メインルーチンにおいて ASVEC を呼び出し全体荷重ベクトルに組み込み，$\{ftempa\}$ とする．

(9) MASSVEC

単位体積重量・慣性力より物体力による等価節点力ベクトルを作成する．

$$\{fevec\} = \left(\sum_{kk=1}^{4} [nm]^T [nm] * (t) * (detJ) \right) \cdot \{(gk) \cdot (gamma)\}$$

ここに (gk) は慣性力（重力加速度に対する比率），$(gamma)$ は材料の単位体積重量（単位体積質量 × 重力加速度），t は要素板厚である．ここで作成した要素荷重ベクトル $\{fevec\}$ を，メインルーチンにおいて ASVEC を呼び出し全体荷重ベクトルに組み込み，$\{fmass\}$ とする．

(10) TEMPAST

温度ひずみ相当ベクトルを荷重として算定した変位増分 $\{dis\}$ より，温度応力 σ を算定する．

$$\{\sigma\} = [d][bm]\{dis\} - \{\sigma_0\}$$

ここで $\{\sigma_0\}$ は TEMPAVEC で計算・保存されたものを使用する．

(11) PRST

① 要素の積分点毎に応力状態の判定・応力値の算出を行う．収束計算 1 回目では前回応力 σ_{i-1} は TEMPAST で算出した温度応力となる．

①-1 荷重ベクトルあるいは不平衡力ベクトルより算定した変位増分 $\{dis\}$ より応力増分 $\{\Delta\sigma_i\}$ を求める．

①-2 収束過程での前回応力 σ_{i-1} に応力増分 $\{\Delta\sigma_i\}$ を加算し現在の応力状態を求める．

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} + \Delta\sigma_i$$

①-3 現在の応力状態から PSTRES を呼び出し主応力を計算し，主応力が要素材料の引張強度を超過しているかを調べ No-tension 状態の判定を行う．

①-4 No-tension 状態の場合，現在の応力から引張成分を除去しこれを新しい応力状態とする

$$\sigma_i = \sigma_i - \sigma_t$$

② 新しい応力状態より要素の内力ベクトルを算定する．

$$\{R_i\} = \sum_{kk=1}^{4} [bm]^T \{\sigma_i\} * (t) * (detJ)$$

③ 変位増分・要素剛性行列より要素節点反力を求める（完全弾性計算用であり No-tension 解析では意味はない）

(12) PSTRES

主応力および主方向の算定

(13) ASMAT

要素剛性行列の全体剛性行列への組み込み

(14) ASVEC

要素荷重ベクトルの全体荷重ベクトルへの組み込み

(15) CHBAND10

コレスキー法三角行列作成．バンドマトリックス・コレスキー法によるルーチンを２分し，時刻や収束計算過程により変化しない三角行列作成部分は１回のみの呼び出しとし，以降保存利用する．

(16) CHBAND11

コレスキー法前進消去・後退代入．時刻や収束計算過程で条件変化する部分を各過程毎に更新しながら解を求める．

(17) IBAND (Function)

コレスキー法適用のため，バンド幅（格納変数 : ib）の計算を行う整数型 Function プロシージャ．入力は，拘束節点処理後の縮小した mm×mm の正方行列であり，行毎に最終列から連続して 0 となっている列数を数え，バンド幅を算定している．数値が 0 であるか否かの判定は，各行列要素数値の絶対値が 1e-30 であるか否かを，判定数値格納変数 fact0 との比較で判定している．

(18) BAND

コレスキー法適用のための，フルマトリックスのバンド化記憶を行う．入力は，拘束節点処理後の縮小した mm×mm の正方行列であり，出力はコレスキー法を適用する mm×ib のサイズの行列となる．なお計算に用いない要素には 0 を格納している．

(19) IERROR1

要素面積が負となった場合のエラー表示を行う．

(20) IERROR2

対角項（バンド化したマトリックスでは第１列）が 0 となった場合のエラー表示を行う．

付録 A　三角形定ひずみ要素の剛性方程式

A.1　変位関数

三角形定ひずみ要素では，１節点２自由度３節点であるため，１要素あたり６自由度を有する．このため，６個の未定係数 $\alpha_{1\sim6}$ を用い，以下の変位を仮定する．

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y \tag{53}$$
$$v = \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x + \alpha_6 \cdot y \tag{54}$$

ここで，三角形の３つの頂点を i，j，k と**反時計回りに設定**し，それぞれの節点変位 (u, v) を節点座標 (x, y) と α で表せば以下の通りとなる．

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \tag{55}$$

これを $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ について解けば

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\boldsymbol{C}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\} \tag{56}$$

ここに，

$$[\boldsymbol{C}] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_k & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_k & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_k \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_k \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \end{bmatrix} \qquad 2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \tag{57}$$

$$\begin{array}{lll} a_i = x_j y_k - x_k y_j & b_i = y_j - y_k & c_i = x_k - x_j \\ a_j = x_k y_i - x_i y_k & b_j = y_k - y_i & c_j = x_i - x_k \\ a_k = x_i y_j - x_j y_i & b_k = y_i - y_j & c_k = x_j - x_i \end{array} \tag{58}$$

ここに，Δ は三角形要素の面積，$\{\boldsymbol{u_{nd}}\}$ は節点変位ベクトル，$\{\boldsymbol{\alpha}\}$ は一般化変位ベクトルである．また，2Δ を直接の計算式で示すと以下の通りである．

$$2\Delta = (x_k - x_j)y_i + (x_i - x_k)y_j + (x_j - x_i)y_k \tag{59}$$

■参考：Sarrus の法則（3×3 の行列式の値）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

以上により，要素内任意点の変位は以下の通り表される．

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \{\boldsymbol{\alpha}\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} [\boldsymbol{C}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\} \tag{60}$$

ここに $[\boldsymbol{N}]$ は内挿関数であり，要素は以下の通り．

$$[\boldsymbol{N}] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} [\boldsymbol{C}] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \tag{61}$$

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} \qquad N_i = \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2\Delta} \qquad N_i = \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2\Delta} \tag{62}$$

A.2 ひずみ-変位関係行列

要素ひずみ $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$ は変位 (u, v) を微分することにより以下の通り表される．

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_k}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & \dfrac{\partial N_k}{\partial y} & \dfrac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix} \{\boldsymbol{u_{nd}}\} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\} \tag{63}$$

よってひずみ-変位関係は以下の通りとなる．

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{B}] =& \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \\ =& \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{64}$$

$$\Delta = 1/2 \cdot [(x_k - x_j)y_i + (x_i - x_k)y_j + (x_j - x_i)y_k] \tag{65}$$

A.3 要素剛性行列および節点力ベクトル

要素剛性行列 $[\boldsymbol{k}]$ は，ひずみ-変位関係行列 $[\boldsymbol{B}]$ および応力-ひずみ関係行列 $[\boldsymbol{D_e}]$ を用い，以下の通りとなる

$$[\boldsymbol{k}] = t \cdot \int_A [\boldsymbol{B}]^T [\boldsymbol{D_e}][\boldsymbol{B}] dA = t \cdot \Delta \cdot [\boldsymbol{B}]^T [\boldsymbol{D_e}][\boldsymbol{B}] \tag{66}$$

また，初期ひずみ $\{\boldsymbol{\epsilon_0}\}$ による節点力ベクトルおよび要素応力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ による内力ベクトル $\{\boldsymbol{R_{nd}}\}$ は以下の通りとなる．

$$\{\boldsymbol{T_{nd}}\} = t \cdot \int_A [\boldsymbol{B}]^T [\boldsymbol{D_e}]\{\boldsymbol{\epsilon_0}\} dA = t \cdot \Delta \cdot [\boldsymbol{B}]^T [\boldsymbol{D_e}]\{\boldsymbol{\epsilon_0}\} \tag{67}$$

$$\{\boldsymbol{R_{nd}}\} = t \cdot \int_A [\boldsymbol{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dA = t \cdot \Delta \cdot [\boldsymbol{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} \tag{68}$$

■温度変化による初期ひずみ

$$\text{平面応力} : \{\boldsymbol{\epsilon_0}\} = \begin{Bmatrix} \alpha T_m \\ \alpha T_m \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \cdot (\phi_i + \phi_j + \phi_k)/3 \\ \alpha \cdot (\phi_i + \phi_j + \phi_k)/3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{平面ひずみ} : \{\boldsymbol{\epsilon_0}\} = \begin{Bmatrix} (1+\nu)\alpha T_m \\ (1+\nu)\alpha T_m \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1+\nu) \cdot \alpha \cdot (\phi_i + \phi_j + \phi_k)/3 \\ (1+\nu) \cdot \alpha \cdot (\phi_i + \phi_j + \phi_k)/3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ここに，α は線膨張係数，ν はポアソン比，T_m は要素を取り囲む節点の平均温度変化量，$\{\phi_i, \phi_j, \phi_k\}^T$ は節点温度変化量である．また，温度変化量の符号は，温度上昇を正とする．

A.4 物体力による節点力

(1) 面積座標

慣性力など物体力による節点力ベクトルを求める場合，内挿関数の積分が必要となる．このため，内挿関数の書き換えを行う．

$$[\boldsymbol{N}] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_i & 0 & \zeta_j & 0 & \zeta_k & 0 \\ 0 & \zeta_i & 0 & \zeta_j & 0 & \zeta_k \end{bmatrix} \tag{69}$$

$$\zeta_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad \zeta_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad \zeta_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \tag{70}$$

$$2\Delta_i = a_i + b_i x + c_i y = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \tag{71}$$

$$2\Delta_j = a_j + b_j x + c_j y = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_i & y_i \end{vmatrix} \tag{72}$$

$$2\Delta_k = a_k + b_k x + c_k y = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \end{vmatrix} \tag{73}$$

この座標 $(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k)$ は面積座標を表し，明らかに

$$\zeta_i + \zeta_j + \zeta_k = 1 \qquad 0 \leqq \zeta_r \leqq 1 \quad (r = i, j, k) \tag{74}$$

である．

(2)　面積座標で表された内挿関数の積分

物体力を求める場合，$\int_A [N]^T [N] dA$ の形の積分が必要となるため，まず $[N]^T[N]$ を求める．

$$[\boldsymbol{N}]^T[\boldsymbol{N}] = \begin{bmatrix} \zeta_i & 0 \\ 0 & \zeta_i \\ \zeta_j & 0 \\ 0 & \zeta_j \\ \zeta_k & 0 \\ 0 & \zeta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_i & 0 & \zeta_j & 0 & \zeta_k & 0 \\ 0 & \zeta_i & 0 & \zeta_j & 0 & \zeta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {\zeta_i}^2 & 0 & \zeta_i\zeta_j & 0 & \zeta_k\zeta_i & 0 \\ 0 & {\zeta_i}^2 & 0 & \zeta_i\zeta_j & 0 & \zeta_k\zeta_i \\ \zeta_i\zeta_j & 0 & {\zeta_j}^2 & 0 & \zeta_j\zeta_k & 0 \\ 0 & \zeta_i\zeta_j & 0 & {\zeta_j}^2 & 0 & \zeta_j\zeta_k \\ \zeta_k\zeta_i & 0 & \zeta_j\zeta_k & 0 & {\zeta_k}^2 & 0 \\ 0 & \zeta_k\zeta_i & 0 & \zeta_j\zeta_k & 0 & {\zeta_k}^2 \end{bmatrix} \tag{75}$$

積分変数の変換公式より

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 g(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) \frac{\partial(x,y)}{\partial(\zeta_i, \zeta_j)} d\zeta_i d\zeta_j \tag{76}$$

要素内任意点を内挿関数で表し，$\zeta_i + \zeta_j + \zeta_k = 1$ の関係を用いると

$$\begin{aligned} x =& \zeta_i x_i + \zeta_j x_j + \zeta_k x_k \qquad \rightarrow \qquad x = \zeta_i(x_i - x_k) + \zeta_j(x_j - x_k) + x_k \\ y =& \zeta_i y_i + \zeta_j y_j + \zeta_k y_k \qquad \rightarrow \qquad y = \zeta_i(y_i - y_k) + \zeta_j(y_j - y_k) + y_k \end{aligned} \tag{77}$$

ヤコビアンは

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(\zeta_i, \zeta_j)} =& \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \zeta_i} & \dfrac{\partial x}{\partial \zeta_j} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \zeta_i} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta_j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i - x_k & x_j - x_k \\ y_i - y_k & y_j - y_k \end{vmatrix} \\ =& (x_k - x_j)y_i + (x_i - x_k)y_j + (x_j - x_i)y_k = 2\Delta \end{aligned} \tag{78}$$

よって

$$\iint_A f(x,y)dxdy = 2\Delta \int_0^1 \int_0^1 g(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) d\zeta_i d\zeta_j \tag{79}$$

また面積座標 $(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k)$ に対し，以下の公式が成り立つ．

$$\int_0^1 \int_0^1 {\zeta_i}^\ell \cdot {\zeta_j}^m \cdot {\zeta_k}^n \cdot d\zeta_i d\zeta_j = \frac{\ell! \cdot m! \cdot n!}{(\ell + m + n + 2)!} \qquad (\ell, m, n \text{ は負でない整数}) \tag{80}$$

たとえば

$$\ell = 2, m = n = 0 \qquad \rightarrow \int_0^1 \int_0^1 {\zeta_i}^\ell \cdot {\zeta_j}^m \cdot {\zeta_k}^n \cdot d\zeta_i d\zeta_j = 1/12$$

$$\ell = 1, m = 1, n = 0 \qquad \rightarrow \int_0^1 \int_0^1 {\zeta_i}^\ell \cdot {\zeta_j}^m \cdot {\zeta_k}^n \cdot d\zeta_i d\zeta_j = 1/24$$

したがって（ζ での積分ではなく A での積分であることに注意）

$$\int_A {\zeta_i}^2 dA = \int_A {\zeta_j}^2 dA = \int_A {\zeta_k}^2 dA = 1/12 \cdot 2\Delta = 1/6 \cdot \Delta$$
$$\int_A \zeta_i \zeta_j dA = \int_A \zeta_j \zeta_k dA = \int_A \zeta_k \zeta_i dA = 1/24 \cdot 2\Delta = 1/12 \cdot \Delta$$

以上により

$$\int_A [\boldsymbol{N}]^T [\boldsymbol{N}] dA = \Delta \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 1/12 & 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/12 & 0 & 1/12 \\ 1/12 & 0 & 1/6 & 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 & 1/6 & 0 & 1/12 \\ 1/12 & 0 & 1/12 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 & 1/12 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \tag{81}$$

(3) 物体力による節点力ベクトル

物体力（慣性力）による節点力ベクトル $\{\boldsymbol{F_B}\}$ は,

$$\{\boldsymbol{F_B}\} = t \cdot \int_A [\boldsymbol{N}]^T \{\boldsymbol{F}\} dA = t \cdot \int_A [\boldsymbol{N}]^T [\boldsymbol{N}] dA \cdot \{\boldsymbol{w}\} \tag{82}$$

と表せる.

ここで，ベクトル $\{\boldsymbol{w}\}$ を以下の通りおく.

$$\{\boldsymbol{w}\} = \gamma \cdot \begin{Bmatrix} k_h & k_v & k_h & k_v & k_h & k_v \end{Bmatrix}^T \tag{83}$$

ここに k_h は水平方向加速度の重力加速度に対する比率（右向き：正），k_v は鉛直方向加速度の重力加速度に対する比率（上向き：正）であり，γ は要素の単位体積重量（質量 × 重力加速度）である.

これにより物体力（慣性力）による節点力ベクトル $\{\boldsymbol{F_B}\}$ は以下の通り定義される.

$$\{\boldsymbol{F_B}\} = \frac{\gamma \cdot \Delta \cdot t}{3} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_h \\ k_v \\ k_h \\ k_v \\ k_h \\ k_v \end{Bmatrix} \tag{84}$$

ここで，Δ は要素面積，t は板厚であり，要素の単位体積重量 γ は要素面積・板厚と共にくくりだしている.

付録 B　軸対称４節点パラメトリック要素

B.1　軸対称問題における応力-ひずみ関係とひずみ-変位関係

回転軸方向の応力・ひずみを添字 z，半径方向の応力・ひずみを添字 r，円周方向の応力・ひずみを添字 θ により表すとすれば，軸対称問題における応力-ひずみ関係式は，以下の通りとなる．

$$\begin{cases} \epsilon_z - \alpha T = \dfrac{1}{E}\{\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)\} \\ \epsilon_r - \alpha T = \dfrac{1}{E}\{\sigma_r - \nu(\sigma_z + \sigma_\theta)\} \\ \epsilon_\theta - \alpha T = \dfrac{1}{E}\{\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)\} \\ \gamma_{zr} = \dfrac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{zr} \end{cases} \tag{85}$$

ここに，ν はポアソン比，α は熱膨張率，T は温度変化量である．

上式を変形することにより

$$\begin{cases} \sigma_z = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\{(1-\nu)\epsilon_z + \nu\epsilon_r + \nu\epsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T\} \\ \sigma_r = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\{\nu\epsilon_z + (1-\nu)\epsilon_r + \nu\epsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T\} \\ \sigma_\theta = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\{\nu\epsilon_z + \nu\epsilon_r + (1-\nu)\epsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T\} \\ \tau_{zr} = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{zr} \end{cases} \tag{86}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{D_e}]\{\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon_0}\} \tag{87}$$

の形で表せば，

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{zr} \end{Bmatrix} \qquad \{\boldsymbol{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{zr} \end{Bmatrix} \qquad \{\boldsymbol{\epsilon_0}\} = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{88}$$

$$[\boldsymbol{D_e}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{89}$$

回転軸方向の変位および半径方向の変位を，それぞれ w，u とおけば，ひずみ-変位関係式は以下の通りとなる．

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{zr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{u}{r} \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{90}$$

B.2　ひずみ-変位関係行列 $[\boldsymbol{B}]$ の導入

軸対称要素内任意点の回転軸方向変位 w および半径方向変位 u を以下のように仮定する．ここに座標 (a,b) は $[-1,1]$ の範囲を有する正規化パラメータ座標，$w_{i,j,k,l}$ および $u_{i,j,k,l}$ は要素を構成する節点の変位を示す．

$$\begin{aligned} w =& N_1(a,b) \cdot w_i + N_2(a,b) \cdot w_j + N_3(a,b) \cdot w_k + N_4(a,b) \cdot w_l \\ u =& N_1(a,b) \cdot u_i + N_2(a,b) \cdot u_j + N_3(a,b) \cdot u_k + N_4(a,b) \cdot u_l \end{aligned}$$

要素内任意点の変位を $\{\boldsymbol{u}\}$，節点変位を $\{\boldsymbol{u_{nd}}\}$ とすれば，

$$\{\boldsymbol{u}\} = \begin{Bmatrix} w \\ u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ u_i \\ w_j \\ u_j \\ w_k \\ u_k \\ w_l \\ u_l \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\} \tag{91}$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-a)(1-b) \qquad & N_2 &= \frac{1}{4}(1+a)(1-b) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+a)(1+b) \qquad & N_4 &= \frac{1}{4}(1-a)(1+b) \end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial a} &= -\frac{1}{4}(1-b) \qquad & \frac{\partial N_2}{\partial a} &= +\frac{1}{4}(1-b) \qquad & \frac{\partial N_3}{\partial a} &= +\frac{1}{4}(1+b) \qquad & \frac{\partial N_4}{\partial a} &= -\frac{1}{4}(1+b) \\ \frac{\partial N_1}{\partial b} &= -\frac{1}{4}(1-a) \qquad & \frac{\partial N_2}{\partial b} &= -\frac{1}{4}(1+a) \qquad & \frac{\partial N_3}{\partial b} &= +\frac{1}{4}(1+a) \qquad & \frac{\partial N_4}{\partial b} &= +\frac{1}{4}(1-a) \end{aligned} \tag{93}$$

要素内任意点のひずみ $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$ は，節点変位 $\{\boldsymbol{u_{nd}}\}$ を用いて，

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{u}{r} \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial N_4}{\partial z} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \dfrac{\partial N_4}{\partial r} \\ 0 & \dfrac{N_1}{r} & 0 & \dfrac{N_2}{r} & 0 & \dfrac{N_3}{r} & 0 & \dfrac{N_4}{r} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial r} & \dfrac{\partial N_1}{\partial z} & \dfrac{\partial N_2}{\partial r} & \dfrac{\partial N_2}{\partial z} & \dfrac{\partial N_3}{\partial r} & \dfrac{\partial N_3}{\partial z} & \dfrac{\partial N_4}{\partial r} & \dfrac{\partial N_4}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ u_i \\ w_j \\ u_j \\ w_k \\ u_k \\ w_l \\ u_l \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u_{nd}}\} \tag{94}$$

ここで，内挿関数 N_i に関する微分は，Jacobi 行列 $[J]$ を用いて以下の通り表せる．

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial a} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial b} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial r} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial r} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial a} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial b} \end{Bmatrix} \tag{95}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial a} & \dfrac{\partial r}{\partial a} \\ \dfrac{\partial z}{\partial b} & \dfrac{\partial r}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial N_i}{\partial a} z_i \right) & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial N_i}{\partial a} r_i \right) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial N_i}{\partial b} z_i \right) & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial N_i}{\partial b} r_i \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \tag{96}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \qquad \det(J) = J_{11} \cdot J_{22} - J_{12} \cdot J_{21} \tag{97}$$

式 (94)(96) より，

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{1}{\det(J)} \left\{ J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial a} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial b} \right\} \qquad \frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{1}{\det(J)} \left\{ -J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial a} + J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial b} \right\} \tag{98}$$

式 (96) の (z_i, r_i) を要素節点の座標とすれば，式 (93)(96) より $[J]$ の要素が定まる．また，$[J]$ が定まれば，式 (93)(97)(98) より，式 (94) で示されるひずみ-変位関係行列 $[\boldsymbol{B}]$ が定まる．

なお，この段階では $[\boldsymbol{B}]$ は変数 a および b の関数として定義されていることに注意する．

以下に $[J]$ の要素を示しておく．ここに $z_{i,j,k,l}$ および $r_{i,j,k,l}$ は要素を構成する節点座標である．

$$
\begin{aligned}
J_{11} &= \frac{\partial N_1}{\partial a} z_i + \frac{\partial N_2}{\partial a} z_j + \frac{\partial N_3}{\partial a} z_k + \frac{\partial N_4}{\partial a} z_l \\
J_{12} &= \frac{\partial N_1}{\partial a} r_i + \frac{\partial N_2}{\partial a} r_j + \frac{\partial N_3}{\partial a} r_k + \frac{\partial N_4}{\partial a} r_l \\
J_{21} &= \frac{\partial N_1}{\partial b} z_i + \frac{\partial N_2}{\partial b} z_j + \frac{\partial N_3}{\partial b} z_k + \frac{\partial N_4}{\partial b} z_l \\
J_{22} &= \frac{\partial N_1}{\partial b} r_i + \frac{\partial N_2}{\partial b} r_j + \frac{\partial N_3}{\partial b} r_k + \frac{\partial N_4}{\partial b} r_l
\end{aligned}
$$

また，要素内任意点の r 座標値は，以下により評価する．

$$
r = N_1 \cdot r_i + N_2 \cdot r_j + N_3 \cdot r_k + N_4 \cdot r_l \tag{99}
$$

ここに，r_i，r_j，r_k，r_l は要素を構成する節点の r 座標値である．

B.3 要素剛性行列および内力ベクトル

要素剛性行列や内力ベクトルは，本来要素の体積積分により求めるが，棒や平面問題に簡略化し 1 次元積分や 2 次元積分を計算することによりこれらを求めている．軸対称要素の場合を考えてみると，回転中心より半径 r の位置にある微小要素の体積は，$r \times d\theta \times dr \times dz$ となる．ここで積分値や荷重ベクトルなどを，円周方向は 1 ラジアンで評価することとし，Gauss 積分を用いるための積分変数変換を行えば，

$$
r \times d\theta \times dr \times dz = r \times dr \times dz = r \times \det(J) \times da \times db \tag{100}
$$

となる．よって，軸対称要素における要素剛性行列 $[\boldsymbol{k}]$ は，応力-ひずみ関係行列を $[\boldsymbol{D_e}]$ とすれば以下の通りとなる．

$$
[\boldsymbol{k}] = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [\boldsymbol{B}]^T [\boldsymbol{D_e}] [\boldsymbol{B}] \cdot r \cdot \det(J) \cdot da \cdot db \tag{101}
$$

また，要素応力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ による内力ベクトル $\{\boldsymbol{R_{nd}}\}$ は以下の通りとなる．

$$
\{\boldsymbol{R_{nd}}\} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [\boldsymbol{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot r \cdot \det(J) \cdot da \cdot db \tag{102}
$$

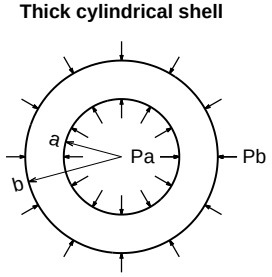
■荷重の考え方　半径 r=2000mm，軸方向長さ z=500mm の円筒 1 要素に p=1N/mm^2(=1MPa) の内圧が作用する場合，要素の内壁に作用する全荷重は，以下の通りとなる．

$$
p \times r \times 1(rad) \times z = 1(N/mm^2) \times 2{,}000(mm) \times 1(rad) \times 500(mm) = 1{,}000{,}000(N)
$$

このため，等価節点力の考え方により，(z,r)=(0,2,000) の節点に 500,000(N)，(z,r)=(500,2,000) の節点に 500,000(N) を半径正方向に載荷すればよい．

B.4　解析事例 (1)：理論解との比較

下図のような内圧あるいは外圧を受ける平面ひずみ厚肉円筒において，理論解と数値解析解の比較を行った．弾性係数・ポアソン比は，コンクリートの物性相当として，それぞれ $E = 25,000N/mm^2$，$\nu = 0.2$ とした．なお，σ_r は半径方向応力，σ_θ は円周方向応力，u は半径方向変位である．



$$
\begin{cases}
u = \dfrac{a^2}{b^2-a^2}\left(\dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\cdot r + \dfrac{1+\nu}{E}\cdot\dfrac{b^2}{r}\right)\cdot P_a \\
\qquad -\dfrac{b^2}{b^2-a^2}\left(\dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\cdot r + \dfrac{1+\nu}{E}\cdot\dfrac{a^2}{r}\right)\cdot P_b \\
\sigma_r = \dfrac{a^2}{b^2-a^2}\left(1-\dfrac{b^2}{r^2}\right)\cdot P_a - \dfrac{b^2}{b^2-a^2}\left(1-\dfrac{a^2}{r^2}\right)\cdot P_b \\
\sigma_\theta = \dfrac{a^2}{b^2-a^2}\left(1+\dfrac{b^2}{r^2}\right)\cdot P_a - \dfrac{b^2}{b^2-a^2}\left(1+\dfrac{a^2}{r^2}\right)\cdot P_b
\end{cases}
$$

① 軸対称 FEM 解析 (12 節点，5 要素)

a	b	P_a	P_b	$\sigma_{r(a)}$	$\sigma_{\theta(a)}$	$\sigma_{r(b)}$	$\sigma_{\theta(b)}$	u_a	u_b
3000	3600	1	0	-0.873	5.42	-0.078	4.627	0.667	0.628
4000	4800	1	0	-0.873	5.42	-0.078	4.624	0.890	0.837
5000	6000	1	0	-0.873	5.42	-0.078	4.624	1.112	1.047
3000	3600	0	1	-0.127	-6.42	-0.922	-5.624	-0.754	-0.732
4000	4800	0	1	-0.127	-6.24	-0.922	-5.624	-1.005	-0.976
5000	6000	0	1	-0.127	-6.42	-0.922	-5.624	-1.256	-1.220

② 理論解

a	b	P_a	P_b	$\sigma_{r(a)}$	$\sigma_{\theta(a)}$	$\sigma_{r(b)}$	$\sigma_{\theta(b)}$	u_a	u_b
3000	3600	1	0	-1	5.545	0	4.545	0.668	0.628
4000	4800	1	0	-1	5.545	0	4.545	0.890	0.838
5000	6000	1	0	-1	5.545	0	4.545	1.113	1.047
3000	3600	0	1	0	-6.545	-1	-5.545	-0.754	-0.732
4000	4800	0	1	0	-6.545	-1	-5.545	-1.005	-0.976
5000	6000	0	1	0	-6.545	-1	-5.545	-1.257	-1.220

比率①/②

a	b	P_a	P_b	$\sigma_{r(a)}$	$\sigma_{\theta(a)}$	$\sigma_{r(b)}$	$\sigma_{\theta(b)}$	u_a	u_b
3000	3600			0.873	0.977	—	1.018	0.999	1.000
4000	4800			0.873	0.977	—	1.017	1.000	0.999
5000	6000			0.873	0.977	—	1.017	0.999	1.000
3000	3600			—	0.981	0.922	1.014	1.000	1.000
4000	4800			—	0.953	0.922	1.014	1.000	1.000
5000	6000			—	0.981	0.922	1.014	0.999	1.000

◯ 軸対称 FEM モデルは，半径方向 5 分割，回転軸方向 1 分割の 5 要素モデルであり，円筒断面内では平面ひずみ条件となるよう拘束条件を指定している．

◯ 理論解の内壁および外壁応力は，厳密な境界条件であるのに対し，軸対称 FEM モデルでは最内側および最外側要素の平均応力であるため，差異が見られるが，定性的には小さくなる方向であり，力学的矛盾はない．

◯ 変位は 0.1% の精度で理論解と一致している．

B.5　解析事例 (2)：2 次元 FEM との比較

(1)　解析モデル

◯ 下表の解析条件で，軸対称 FEM と 2 次元平面ひずみ解析結果の比較を行った．

◯ 軸対称 FEM モデルは，半径方向の分割は 2 次元平面ひずみ解析モデルと同一 (33 要素)，回転軸方向は 1 要素とし，覆工断面内で平面ひずみ条件となるよう回転軸方向変位を拘束した．

◯ 軸対称 FEM モデルは，2 次元 FEM と同程度の値が得られている．

断面	複鉄筋断面
水路内半径	4,000 mm
覆工厚	800 mm
岩盤外縁半径	50,000 mm
鉄筋かぶり	100 mm
内側鉄筋	D32@200x2
(鉄筋等価板厚)	3.97 mm
外側鉄筋	D32@200x2
(鉄筋等価板厚)	3.97 mm
コンクリート弾性係数	25,000 $\mathrm{N/mm^2}$
コンクリートポアソン比	0.2 (No-tension 時は 0)
コンクリート熱膨張係数	10×10^{-5} °$\mathrm{C^{-1}}$
鉄筋弾性係数	200,000 $\mathrm{N/mm^2}$
鉄筋ポアソン比	0.3
鉄筋熱膨張係数	10×10^{-6} °$\mathrm{C^{-1}}$
岩盤弾性係数	1∼100,000 $\mathrm{N/mm^2}$
岩盤ポアソン比	0.25
岩盤熱膨張係数	7×10^{-6} °$\mathrm{C^{-1}}$
内水圧	1 MPa
温度変化量	熱伝導解析結果に
	(内壁温度変化量 −10 °C)

(2)　解析結果

① 軸対称 FEM 解析 (68 節点，33 要素)

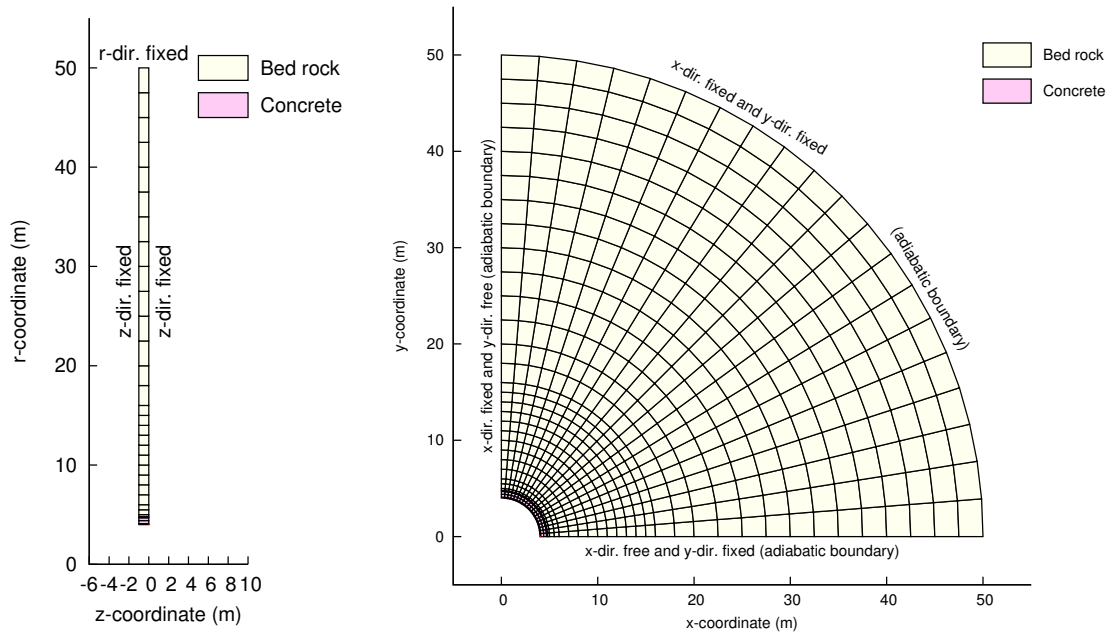
E_g	σ_{cr}	σ_{sa}	σ_{sb}	$\sigma_{\theta g}$	σ_{rg}	u_a	u_b
1	-0.987	540.249	465.332	0.002	-0.002	9.596	9.508
10	-0.987	530.955	457.206	0.016	-0.015	9.423	9.335
100	-0.987	453.789	389.753	0.136	-0.128	7.983	7.893
1000	-0.987	197.261	165.514	0.571	-0.502	3.195	3.102
10000	-0.987	54.594	40.804	1.336	-0.678	0.532	0.438
100000	-0.987	33.539	22.399	6.908	-0.365	0.139	0.044

② 2 次元平面ひずみ FEM 解析 (714 節点，660 要素)

E_g	σ_{cr}	σ_{sa}	σ_{sb}	$\sigma_{\theta g}$	σ_{rg}	u_a	u_b
1	-0.987	540.078	465.188	0.002	-0.002	9.591	9.503
10	-0.987	530.786	457.066	0.015	-0.015	9.417	9.329
100	-0.987	453.648	389.636	0.131	-0.130	7.978	7.889
1000	-0.987	197.211	165.472	0.550	-0.511	3.193	3.100
10000	-0.987	54.593	40.803	1.278	-0.712	0.532	0.437
100000	-0.987	33.545	22.403	6.559	-0.629	0.139	0.044

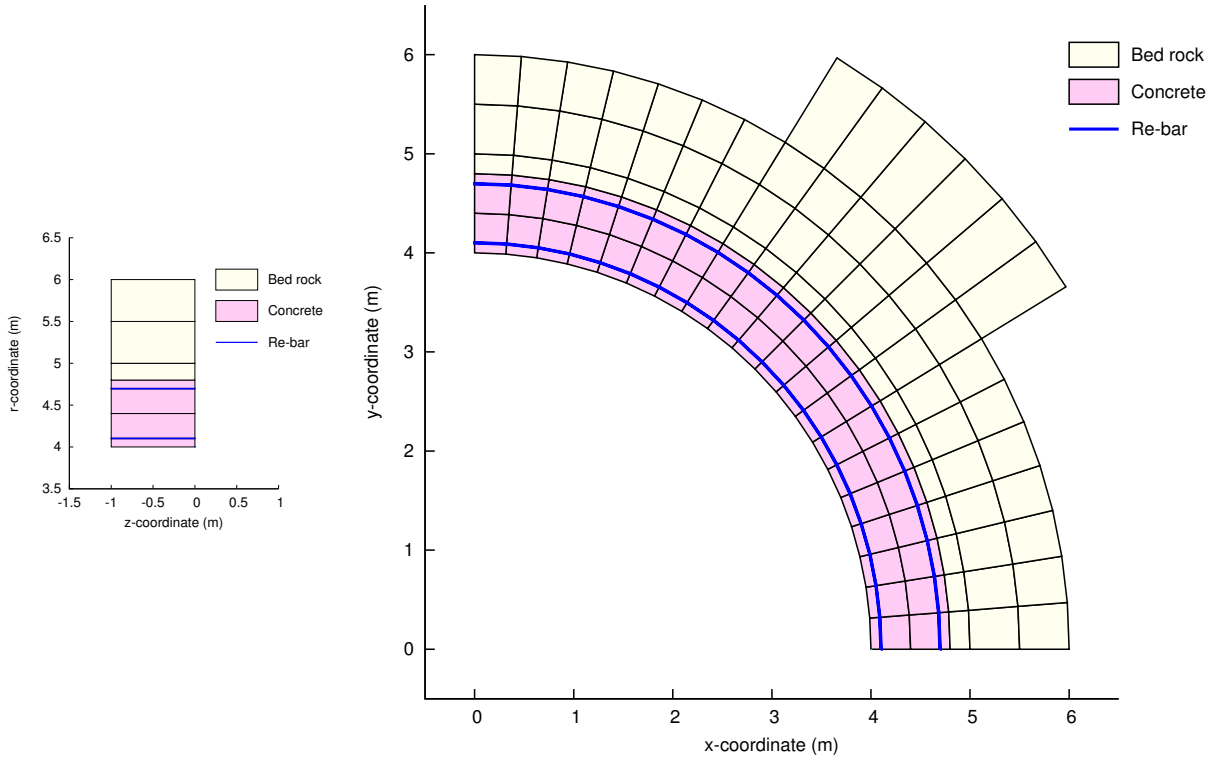
比率①/②

E_g	σ_{cr}	σ_{sa}	σ_{sb}	$\sigma_{\theta g}$	σ_{rg}	u_a	u_b
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.001	1.001
10	1.000	1.000	1.000	1.067	1.000	1.001	1.001
100	1.000	1.000	1.000	1.038	0.985	1.001	1.001
1000	1.000	1.000	1.000	1.038	0.982	1.001	1.001
10000	1.000	1.000	1.000	1.045	0.952	1.000	1.002
100000	1.000	1.000	1.000	1.053	0.580	1.000	1.000



軸対称モデル　　2 次元平面ひずみモデル

図 9　解析モデル図 (全体：覆工厚 800mm)



軸対称モデル　　2 次元平面ひずみモデル

図 10　解析モデル図 (覆工周辺：覆工厚 800mm，複鉄筋断面)

参考文献

[1] 三本木茂夫・吉村信敏：コンピュータによる構造工学講座 I-1-B　日本鋼構造協会編　有限要素法による構造解析プログラム　考え方と解説，培風館，昭和 54 年 5 月

[2] 山田嘉昭：有限要素法の基礎と応用シリーズ 2　マトリックス法材料力学，培風館，昭和 55 年 5 月

[3] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier : Theory of Elasticity Third edition, McGRAW-HILL BOOK CAMPANY, 21st printing 1985

[4] 宮沢健二：パソコン構造力学–力学挙動の可視化–，啓学出版株式会社，1984 年 6 月

[5] H.C. Martin / G.F. Carey 共著，鷲津久一郎/山本善之共訳：有限要素法の基礎と応用，培風館，昭和 56 年 10 月

[6] O.C.Zienkiewicz 著，吉識雅夫/山田嘉昭監訳：基礎工学におけるマトリックス有限要素法，培風館，昭和 50 年 12 月

[7] 竹内則雄：コンピュータによる極限解析法シリーズ 4　地盤力学における離散化極限解析，培風館，1991.7